微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2006 年 6 月 6 日[1,2]

2-3 平均値の定理

29.　平均値の定理を用いて次を示せ。

(1) $\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2} \quad (-1 \le x \le 1)$　　(2) $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & (x > 0) \\ -\pi/2 & (x < 0) \end{cases}$

(3) $\mathrm{Arccos}(\sin x) = \dfrac{\pi}{2} - x \quad \left(|x| \le \dfrac{\pi}{2}\right)$　　(4) $\mathrm{Arccos}\, \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{Arctan}\, x \quad (x > 0)$

(5) $\mathrm{Arcsin}\, \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{Arctan}\, x \quad x \in \mathbf{R}$　　(6) $\tan\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\, x\right) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \quad (-1 \le x \le 1)$

30.　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2-0} \frac{\log\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\tan x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, x\right)^{\frac{1}{x}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, x\right)$

2-4 Taylor の定理

31.　Taylor の公式 (または Maclaurin の公式) を使って、次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

32.　関数 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$ は $\mathbf{R}$ で C^∞ であり、すべての $n = 0, 1, 2, \ldots$ について $f^{(n)}(0) = 0$ となることを証明せよ。
(注意: これより関数が C^∞ 級だからといって必ずしも Taylor 展開できないことがわかる。実際、この $f(x)$ が $x =$ のまわりに Taylor 展開できたとすると $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0$ となり矛盾する。)

2-5 関数の増減, 2-6 関数の近似, 2-7 凸関数

33.　$x \to 0$ のとき $e^x - \dfrac{1-ax}{1+ax}$ の x に対する位数ができるだけ大きくなるように a に値を定めよ。

34.　次を示せ。

(1) $f(x) = x^n + ax^{n-1} + \cdots$, $g(x) = x^m + bx^{m-1} + \cdots$ をそれぞれ n 次, m 次の多項式とすると、
$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[m]{g(x)}\right) = \frac{a}{n} - \frac{b}{m}.$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} = e^{-x^2/2}$.

35.　関数 $f(x) = x^{1/x}$ $(x > 0)$ の増減を調べることにより、次の不等式を導け。

(1) $\sqrt[n]{n} < \sqrt[3]{3}$　　(2) $m^n < n^m$　　($3 < n < m$ で m, n は整数とする。)

36.　曲線 $y = f(x)$ 上の点 P から直線 ℓ におろした垂線の足を H とする。$\overline{OP} \to \infty$ のとき、$\overline{PH} \to 0$ であれば ℓ を**漸近線**という。直線 $y = ax + b$ が漸近線ならば、$|x| \to \infty$ のとき、$f(x)/x \to a$ かつ $(f(x) - ax) \to b$ であることを示せ。逆に、この関係によって a, b が決まるならば、$y = ax + b$ は漸近線であることを示せ。

37.　次の関数のグラフを描け。[3]

(1) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$　　(2) $y = x \log x$　　(3) $y = x^2 \log x$　　(4) $y = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

---

[1] 杉浦のホームページ (http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html) からもダウンロードできます。
[2] **略解: 29** 略　**30** (1) 0 (2) 1 (3) 1　**31** (1) $-1/8$ (2) 2 (3) $-1/3$　**32** 略　**33** $a = -1/2$　**34–37** 略
[3] 曲線のグラフを描くには次のことを調べよ。1. グラフが通る点、特に座標軸を切る点。 2. グラフの存在する範囲。 3. 直線、点に関する対称性、特に両座標軸・原点についての対称性。 4. 関数の増減と極大・極小。 5. グラフの凹凸。 6. 漸近線