微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2006 年 5 月 26 日[1]

2 微分とその応用　　2-1 微分係数, 導関数の補足問題[2]

20.　次の関数について、$f'_+(0), f'_-(0), f'(0)$ が存在するか。存在すればそれを求めよ。(a, b は定数。)

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$　　(3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$

(4) $f(x) = |x| - \sin |x|$　　(5) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+1} & (x \geq 0) \\ ax^2 + bx + 1 & (x < 0) \end{cases}$

21.　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $\mathrm{Arccos}(\sin x)$　　(2) $\mathrm{Arcsin}(\cos x)$　　(3) $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \dfrac{1}{x}$

(4) $\mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$　　(5) $\mathrm{Arctan} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

22.　数列 $\{c_n\}$ に対して、次で定義される関数 $f(x)$ が $x = 0$ で右微分可能となるための条件は、数列 $\{nc_n\}$ が収束することであることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} c_n & \left(\dfrac{1}{n+1} < x \leq \dfrac{1}{n} \;:\; n = 1, 2, \dots \right) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

2-2 高次導関数の補足問題[3]

23.　$f(x) = \mathrm{Arcsin}\, x$ のとき、次を示せ。(*cf.* p.54 問 3)

(1) $(1-x^2) f^{(n+1)}(x) - (2n-1) x f^{(n)}(x) - (n-1)^2 f^{(n-1)}(x) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$

(2) $f^{(2m)}(0) = 0,\ f^{(2m+1)}(x) = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \cdots \cdot (2m-1)^2$

24.　$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \dfrac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2/2} \right)$ に対し、以下を示せ。(*cf.* p.53 例 2)

(1) $H_{n+1}(x) = x H_n(x) - n H_{n-1}(x)$ (これによって、$H_n(x)$ が n 次多項式であることがわかる。これを Hermite 多項式と呼ぶ。)

(2) $H'_n(x) = n H_{n-1}(x)$

(3) $H''_n(x) - x H'_n(x) + n H_n(x) = 0$ (Hermite の微分方程式)

25.　$L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x} \right)$ に対し、以下を示せ。(*cf.* p.55 **3**)

(1) $L_n(x)$ は n 次多項式である。(Laguerre の多項式)

(2) $x L''_n(x) + (1-x) L'_n(x) + n L_n(x) = 0$ (Laguerre の微分方程式)

26.　$y = \mathrm{Arctan}\, x$ に対し、$\dfrac{d^n y}{dx^n} = (n-1)! \cos^n y \sin \left(ny + \dfrac{n\pi}{2} \right)$ $(n = 1, 2, \dots)$ を示せ。

27.　$x = \varphi(t), y = \psi(t)$ に対し、$\varphi'(t) \neq 0$ のとき、次の式を導け。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\{\varphi'(t)\}^3}$$

28.　次の媒介変数表示の関数から d^2y/dx^2 を求めよ。($a, b > 0$ とする。)

(1) $x = a \cos t,\ y = b \sin t$　　(2) $x = a \cos^3 t,\ y = b \sin^3 t$

---

[1] 杉浦のホームページ (http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html) からもダウンロードできます。

[2] **略解: 20** $f'_+(0), f'_-(0), f'(0)$ の順に (1) $2, -1,$ なし　(2) $0, 0, 0$　(3) $0, 0, 0$　(4) $0, 0, 0$　(5) $1, b,$ $b = 1$ のときのみ存在し 1
21 (1) $-\frac{\cos x}{|\cos x|}$ (2) $\frac{\sin x}{|\sin x|}$ (3) 0 (4) $\frac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}}$ (5) $1/2$ $(x > 0)$, $-1/2$ $(x < 0)$　**22** 略

[3] **略解: 23–27** 略　**28** (1) $\frac{b}{a^2} \sin^3 t$　(2) $\frac{b}{3a^2 \cos^4 t \sin t}$