

テストに関する連絡

- 次回のテストの日程を5月30日(火)とします。試験範囲は第1章1-1 3. 集積値(集積値については出題しない), 1-2, 1-3 とします。なお、逆三角関数については次回の出題とし、今回は出題しません。主に教科書の定理や問題とハンドアウトの問題を少し変更を加えて出題します。今後のテストは6月20日(火)および7月11日(火)を予定しています。

1-2 関数の極限の補足問題²

12. 次の極限值を求めよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + x - 2}{|x - 1|}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + x - 2}{|x - 1|}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/5} - (1-x)^{1/5}}{(1+2x)^{1/3} - (1-2x)^{1/3}}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \{2 \log(1+x) - \log(1+2x)\}$
- (7) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+a} - \sin \sqrt{x})$ (8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 1})$ (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} - 1}$
- (10) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x+x^2)^{1/x}$ (11) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$ (12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{-1/2} - (1-ax)}{x^2}$ が極限をもつように a を定め、極限を求めよ。

1-3 連続関数の補足問題³

14. 次の関数が連続となるように定数 a, b を決めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \in (-\infty, 0)) \\ ax + b & (x \in [0, 1]) \\ \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 4x + 6}}{x - 1} & (x \in (1, \infty)) \end{cases}$$

15. $f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$ とおくと、 $f(x)$ は $x = 0$ でのみ連続で、 $x \neq 0$ なる点 x では不連続であることを示せ。

16. 次の関数の定義域および連続性を調べ、グラフをかけ。

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \cdots + \frac{x}{(1+x)^n} \right)$$

17. \mathbf{R} 上の連続関数 $f(x)$ が次の条件(*)を満たせば、 $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = x$ と必ず交わることを示せ。

$$(*) \quad |f(x)| \leq a|x| + b$$

ただし、 $0 < a < 1, b > 0$ は定数とする。

18. 次の関数がそれぞれ指定された区間 I 上で一様連続か調べよ。

- (1) $e^{-1/|x|}$ ($I = (0, \infty)$) (2) x^2 ($I = \mathbf{R}$) (3) $\sin \frac{1}{x}$ ($I = (0, \pi)$)

19. 関数 $f(x)$ が \mathbf{R} 上で連続で $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ を満たせば、 $f(x)$ は \mathbf{R} 上で一様連続であることを示せ。

¹杉浦のホームページ (<http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html>) からダウンロードできます。

²略解: 12 (1) 3 (2) -3 (3) 3/10 (4) 1 (5) 極限なし (6) 1 (7) 0 (8) 1/2 (9) 2/3 (10) e (11) $e^{-1/2}$ (12) -1/2 13 $a = 1/2$ 極限 3/8

³略解: 14 $a = \sqrt{3} - 1, b = 1$ 15 略 16 定義域 $x > -1/2, -1/2 < x < 0, 0 < x$ で連続, グラフは略 17 略 18 (1) (2) × (3) × 19 略