微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2006 年 4 月 21 日

1-1 実数と数列 の補足問題 (続き)

2.　$A \subset \mathbf{R}$ を空でない有界な集合とする。$B = \{ -x \,;\, x \in A \}$ とおくとき、

$$\sup B = -\inf A, \qquad \inf B = -\sup A$$

を証明せよ。

3.　A を開区間 $(0, \infty)$ に含まれる空でない有界な部分集合とし $B = \left\{ \frac{1}{x} \,;\, x \in A \right\}$ とおく。このとき、

$$\sup B = \frac{1}{\inf A}, \qquad \inf B = \frac{1}{\sup A}$$

を証明せよ。ただし、B が上に有界でないときは $\sup B = \infty$ とすることとし、$\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ と約束する。

4.　次を ε-n_0 論法で示せ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty.$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

5.　数列 $\{a_n\}$ について、$a_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となるとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ を示せ。

6.　数列 $\{a_n\}$ に対し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \alpha$ ならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となることを示せ。

7.　(1) $x, y \in \mathbf{R}$ に対し $\bigl(|x| - |y|\bigr)^2 \le \bigl(x - y\bigr)^2$ を示し、$\bigl||x| - |y|\bigr| \le \bigl|x - y\bigr|$ を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ を示せ。

8.　(1) $x, y \in \mathbf{R}$ に対し次を示せ。

(i) $\max\{x, y\} = \dfrac{(x+y) + |x-y|}{2}$　　(ii) $\min\{x, y\} = \dfrac{(x+y) - |x-y|}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき、次を示せ。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{\alpha, \beta\}$,　　(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{\alpha, \beta\}$.

9.　$a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\bigl({a_n}^2 + 2\bigr)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) $0 < a_1 < 1$ のとき $\{a_n\}$ が上に有界な単調増加数列であることを示し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ を示せ。

(2) $a_1 > 1$ の場合どうなるか考察せよ。(ヒント：$1 < a_1 < 2$, $a_1 = 2$, $a_1 > 2$ と場合わけせよ。)

10.　$a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_1 + \cdots + a_n}$ $(n \in \mathbf{N})$ とする。$\{a_n\}$ が下に有界な単調減少数列であることを示し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

11.　(1) 数列 $\{a_n\}$ に対し次の定数 c, $0 \le c < 1$, の存在を仮定する。

$$\forall n \ge 2 \text{ に対し } |a_{n+1} - a_n| \le c|a_n - a_{n-1}|$$

このとき、$\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを証明せよ。

(2) 次の数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(i) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n + 1}$　$(n \in \mathbf{N})$　　(ii) $a_1 \ge 0,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$　$(n \in \mathbf{N})$