

情報理論II

杉浦 誠

平成16年12月5日

目次

1	Brown 運動	3
1.1	確率過程	3
1.2	Brown 運動の定義	5
1.3	簡単な性質	8
1.4	Markov 性	10
1.5	Brown 運動の構成の別証明	13
2	Martingales	15
2.1	条件付平均値と条件付確率	15
2.2	Stopping time	16
2.3	Martingales	18
2.4	Brown 運動の強 Markov 性	20
2.5	2 次変分	21
3	確率積分	29
3.1	確率積分の定義	29
3.2	伊藤の公式	34

1 Brown 運動

この章では、Brown 運動を定式化し、Markov 性やその他の簡単な性質を見る。^{1 2}

1.1 確率過程

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とし、確率変数等はこの確率空間に定義されているものとする。以下、 t は連続的に変化するとして、 $t \in [0, \infty)$ あるいは $t \in [0, T], T > 0$ とする。

定義 1.1 (1) $t \geq 0$ によりパラメーター付けられた \mathbb{R}^d 値確率変数の族 $X = (X_t)_{t \geq 0} = (X_t(\omega))_{t \geq 0}$ を d 次元確率過程 (stochastic process) という。単に確率過程といえば実数値 ($d = 1$) である。

(2) d 次元確率過程が連続とは、 $\forall \omega \in \Omega$ に対し $t \mapsto X_t(\omega)$ が連続であるときにいう。^{3 4}

注意 1.1 $W^d = C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ とおく (path 空間という)。 X が d 次元連続確率過程であるとは、 $X(\omega) \in W^d, \forall \omega \in \Omega$ というだけではなく、 X は W^d -値確率変数であることを意味している: 即ち、 $\forall A \in \mathcal{B}(W^d)$ に対して $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ を満たす。ここで、 W^d は広義一様収束から定まる位相⁵を考え、 $\mathcal{B}(W^d)$ はこの位相での Borel 集合族を表す。これを示すために次の σ -加法族を導入する:

$$\mathcal{B}_K(W^d) := \sigma \{ C(t_1, \dots, t_n; A); n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < \dots < t_n < \infty, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dn}) \}$$

ここで $C(t_1, \dots, t_n; A) := \{w = (w_t)_{t \geq 0} \in W^d; (w_{t_1}, \dots, w_{t_n}) \in A\}$ は柱状集合 (cylinder set) といい、上の σ -加法族 (すべての柱状集合を含む最小の σ -加法族) は Kolmogorov の σ -加法族と呼ばれる。実はこのとき、 $\mathcal{B}(W^d) = \mathcal{B}_K(W^d)$ が成立し、このことから連続確率過程 X が W^d -値確率変数であることがわかる。

問 1.1 (1) $\mathcal{B}(W^d) = \mathcal{B}_K(W^d)$ を示し、(2) 連続確率過程 X が W^d -値確率変数であることを示せ。

\mathcal{F} の部分 σ -加法族の増大列 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ が、各 \mathcal{F}_t は σ -加法族で $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, 0 \leq s \leq t$ を満たすとき、filtration という。

¹このノートは次の URL からダウンロードできます。 <http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/>

²参考文献: [F] 舟木直久: 確率微分方程式 岩波書店

[N] 長井英生: 確率微分方程式 共立出版

[IW] N.Ikeda and S.Watanabe: Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. 2nd ed., North Holland, 1989.

[KS] I.Karatzas and S.E.Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus. 2nd ed., Springer, 1991.

[O] B.Øksendal: Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. 6th ed., Springer, 2003. (第5版の邦訳あり: 谷口説男 訳)

[RY] D.Revuz and M.Yor: Continuous Martingales and Brownian Motion 3rd ed., Springer, 1998.

[SV] D.W.Stroock and S.R.S.Varadhan: Multidimensional Diffusion Processes, Springer, 1979.

ここでは主に [F] に従って述べる。尚、この授業では確率論の基礎的事項は [F1] 舟木直久: 確率論 朝倉書店 (今年中に出版予定) を引用し証明なしで用います。

³この授業では連続確率過程のみを扱う。一般に右連続左極限を持つ関数の空間を path 空間とする場合もある。(Poisson 過程などがその例となる。)

⁴本来は連続修正 (continuous modification) について議論すべきであるが、ここでは略す。ここで、確率過程 X が連続修正をもつとは、連続な確率過程 Y が存在して $P(X_t = Y_t) = 1, \forall t \geq 0$ なるときにいう。

⁵この位相で W^d は可分完備距離空間 (ポーランド空間) となる。

定義 1.2 (1) d 次元確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ が (\mathcal{F}_t) -適合 (adapted) とは、 $\forall t \geq 0$ に対して $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ が \mathcal{F}_t -可測のときにいう。

(2) d 次元確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ が (\mathcal{F}_t) -発展的可測 (progressively measurable) とは、 $\forall t \geq 0$ に対して写像 $[0, t] \times \Omega \ni (s, \omega) \mapsto X_s(\omega) \in \mathbb{R}^d$ が $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t / \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -可測のときにいう。ここで、 $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ は直積 σ -加法族を表す。

注意 1.2 X が (\mathcal{F}_t) -適合とは、 t 時までの情報量としての \mathcal{F}_t から X_t が判別可能であることを意味する。一方、発展的可測は $E[\int_0^t f(X_s) ds] = \int_{\Omega \times [0, t]} f(X_s(\omega)) P(d\omega) ds$ を考えるのに必要となる。(実際は単に可測であれば十分である。) 実は、補題 1.1 により X が (\mathcal{F}_t) -適合かつ右連続であれば、 (\mathcal{F}_t) -発展的可測である。

補題 1.1 $X = (X_t)$ が (\mathcal{F}_t) -適合とする。 X が右連続: $\lim_{h \downarrow 0} X_{t+h}(\omega) = X_t(\omega), \forall t \in [0, \infty), \forall \omega \in \Omega$ であれば、 (\mathcal{F}_t) -発展的可測である。

証明: X_t は右連続とする。

$$X_s^{(n)}(\omega) := X_{(k+1)t/2^n}(\omega) \quad \text{for } kt/2^n < s \leq (k+1)t/2^n, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$$

とする。 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\{(s, \omega); X_s^{(n)}(\omega) \in A\} = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left(\frac{kt}{2^n}, \frac{(k+1)t}{2^n} \right] \times \{\omega; X_{(k+1)t/2^n}(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$$

だから $X_s^{(n)}$ は $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ -可測。右連続性より $\lim_{n \rightarrow \infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega), \forall \omega \in \Omega$. よって X_s は $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ -可測となる。 \square

定義 1.3 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ を filtration とする。

(1) $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$ とおく。 $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t, \forall t$, のとき (\mathcal{F}_t) は右連続、

(2) $\mathcal{F}_{t-} := \sigma(\mathcal{F}_s; s < t)$ とおく。 $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t, \forall t$, のとき (\mathcal{F}_t) は左連続という。

例 1.1 連続な確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ に対し、 $\mathcal{F}_t^{0, X} = \sigma\{X_s; 0 \leq s \leq t\}$ とおくと $(\mathcal{F}_t^{0, X})_{t \geq 0}$ は filtration で、 X は $(\mathcal{F}_t^{0, X})$ -適合となる。この $(\mathcal{F}_t^{0, X})$ を X の自然な filtration という。一般に $(\mathcal{F}_t^{0, X})$ は左連続であるが、右連続ではない。

問 1.2 X を連続な d 次元確率過程とする。開集合 $O \subset \mathbb{R}^d$ に対し $\sigma_O(\omega) := \inf\{t \geq 0; X_t(\omega) \in O\}$ とする ($\inf \emptyset = \infty$ と定める) と、 $\{\sigma_O \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}^{0, X}$ であるが一般には $\{\sigma_O \leq t\} \notin \mathcal{F}_t^{0, X}$ であることを確かめよ。

確率過程の動きは、測度 P により支配される。その意味で測度 0 の集合族 $\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{F}; P(N) = 0\}$ を $\mathcal{F}_t^{0, X}$ に付け加えて、 $\mathcal{F}_t^X := \mathcal{F}_t^{0, X} \vee \mathcal{N}$ を考えたほうが自然である。というのは、例えば $X_t = Y_t$ a.s. ($\forall t \geq 0$) で X が (\mathcal{F}_t^X) -適合ならば Y も (\mathcal{F}_t^X) -適合となる。このようにして定義した \mathcal{F}_t は (例えば Brown 運動のときのように) 自動的に t について連続になることがあり、便利である (cf. 定理 1.11)。

1.2 Brown 運動の定義

定義 1.4 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された (実数値) 確率過程 $B = (B_t)_{t \geq 0} = (B_t(\omega))_{t \geq 0}$ が Brown 運動 (Brownian motion) であるとは、次の条件を満たすときにいう。

- (1) $B_0 = 0$ a.s.
- (2) $\forall \omega \in \Omega$ に対して、 $t \mapsto B_t(\omega)$ は連続である。
- (3) $0 \leq s \leq t$ に対し $B_t - B_s$ と $\mathcal{F}_s^{0,B} := \sigma(B_u; u \leq s)$ は独立。
- (4) $0 \leq s \leq t$ に対し、 $B_t - B_s$ は平均値 0, 分散 $t - s$ の Gauss 分布に従う。

注意 1.3 条件 (2) あるいは定義 1.1 では a.s. ω に対する連続性のみを仮定することが多い。しかし、それは本質的には同じことである。 $B_t(\omega)$ が連続でないような ω については、例えば $B_t(\omega) \equiv 0$ ($t \geq 0$) と定義し直せばよいからである。

条件 (3), (4) から $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ に対し $\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\}_{1 \leq i \leq n}$ は独立でそれぞれ $N(0, t_i - t_{i-1})$ に従う。これは $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$P(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \in A_i, 1 \leq i \leq n) = \int_{A_1} dx_1 \int_{A_2} dx_2 \cdots \int_{A_n} dx_n \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_i)$$

であることと同値である。ここで、

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

とした。さらに、 $y_0 = 0, x_i = y_i - y_{i-1}, 1 \leq i \leq n$ と変数変換すると、 $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$P(B_{t_i} \in A_i, 1 \leq i \leq n) = \int_{A_1} dy_1 \int_{A_2} dy_2 \cdots \int_{A_n} dy_n \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, y_i - y_{i-1}) \quad (1.2)$$

が得られる。これは、Brown 運動の n 時点での結合分布を与えている。次の定理は最も基本的である。

定理 1.2 適当な確率空間上に Brown 運動は存在する。

定理 1.2 の証明のために、Kolmogorov による二つの基本定理を準備する⁶。

定理 1.3 (Kolmogorov の拡張定理) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上の確率測度 μ_n が与えられ整合的 (consistent) であるとする。即ち、

$$\mu_{n+1}(A \times \mathbb{R}) = \mu_n(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}$$

が成立すると仮定する。このとき、 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ 上の確率測度 μ で $\mu(A \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mu_n(A), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ となるものが一意的に存在する。ただし、 $A \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(x^1, x^2, \dots); (x^1, \dots, x^n) \in A\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を表し、 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ には直積位相を入れ、 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ はその Borel 集合族を表す。

⁶Brown 運動の構成方法としてここで紹介するものの他に (1) ランダムな係数をもつ Fourier 級数による方法、(2) Gauss 系の存在定理に帰着する方法、(3) ランダムウォークの時空に関するスケール変換の極限として導く (Donsker の不変原理と呼ばれる) がある。(cf. [KS] pp.56–71.)

証明: 第1段: $\mathcal{C} := \{A \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}\}$ の要素を $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の柱状集合という。 μ を柱状集合上では $\mu(A \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mu_n(A)$ と定義する。 $\{\mu_n\}$ は整合的だから μ は n の取り方によらず一意的に定まる。 \mathcal{C} は有限加法族だから

$$C_n \in \mathcal{C} \text{ が } C_n \downarrow \emptyset \text{ (} C_n \supset C_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ かつ } \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset \text{) ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = 0 \quad (1.3)$$

が示されれば、Hopf の拡張定理により、 μ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \sigma(\mathcal{C})$ 上の測度として一意的に拡張され結論が言える。このために (1.3) を否定し $\exists \varepsilon > 0 : \mu_n(C_n) > \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ として $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ を示し矛盾を導く。

第2段: $C_n = A_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ としても一般性を失わない。実際、 $C_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ から始め、同じ C_n を繰り返してとればよいからである。更に、各 A_n はコンパクト集合としてよい。実際、 $A'_n \subset A_n$ を A'_n はコンパクトかつ $\mu_n(A_n \setminus A'_n) \leq \varepsilon/2^{n+1}$ を満たすようにとれる。そこで、 $i < n$ のときは $\tilde{A}'_i = A'_i \times \mathbb{R}^{n-i}$ として $A''_n = \tilde{A}'_1 \cap \dots \cap \tilde{A}'_{n-1} \cap A'_n$, $C''_n = A''_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ とおけば、 A''_n はコンパクト、 $C''_n \downarrow \emptyset$ かつ

$$\mu(C''_n) = \mu_n(A''_n) \geq \mu_n(A_n) - \sum_{i=1}^n \mu_i(A_i \setminus A'_i) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

であるからである。

第3段: $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ を示す。 $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots) \in C_n, n \in \mathbb{N}$ を任意に取る。このとき、対角線論法により $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ と $x_{\infty} = (x_{\infty}^1, x_{\infty}^2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ が存在して、各 i に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x_{\infty}^i$ とできる。各 A_n はコンパクト、即ち、閉集合だから $(x_{\infty}^1, \dots, x_{\infty}^n) \in A_n$ となり $x_{\infty} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ を得る。 \square

$$D_n := \{k/2^n; k = 0, 1, \dots, 2^n\}, D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \text{ とおく。}$$

定理 1.4 (Kolmogorov の正規化定理) 確率過程 $X = (X_t)$ が、 $C, \varepsilon, p > 0$ が存在して

$$E[|X_t - X_s|^p] \leq C|t - s|^{1+\varepsilon}, \quad \forall s, t \in D \quad (1.4)$$

を満たせば、 X_t は *a.s.* に D 上一様連続である。

証明: 第1段: $\lambda_n := 2^{-n\varepsilon/2p}$ ととり

$$I_n := \{(s, t) \in D \times D; |t - s| \leq 2^{-n}\} \\ A_n := \{\omega \in \Omega; |X_s - X_t| \geq \lambda_n, \exists (s, t) \in I_n\}$$

とおく。もし $P(A_n) \leq C_1 2^{-n\varepsilon/2}$ が示されれば、Borel-Cantelli の補題より $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0$ となり、結論を得る。

第2段: $a(n, t) = k/2^n, t \in [k/2^n, (k+1)/2^n)$ とおく。このとき

$$X_t = X_{a(n,t)} + \sum_{i=0}^{\infty} (X_{a(n+i+1,t)} - X_{a(n+i,t)}), \quad t \in D$$

である。実際 j を十分大とすると $a(j, t) = t$ であり、従って、上式右辺は有限和である。 X_s も同様の和に表され、 $(s, t) \in I_n$ ならば $|a(n, t) - a(n, s)| \leq 2^{-n}$ である。

第3段: 次に $\omega \in A_n$ ならば、次の (a), (b) のいずれかが成立する:

(a) $\exists(s, t) \in I_n$ s.t. $|X_{a(n,t)} - X_{a(n,s)}| \geq \lambda_n/2$

(b) $\exists t, \exists i$ s.t. $|X_{a(n+i+1,t)} - X_{a(n+i,t)}| \geq 3\lambda_n/2(i+1)^2\pi^2$.

もし (a), (b) ともに成立しなければ、 $|X_t - X_s| < \frac{\lambda_n}{2} + \frac{3\lambda_n}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^2} = \lambda_n, \forall(s, t) \in I_n$ となるからである。(a) が成立するとき、 $\exists(q, r) \in I_n \cap (D_n \times D_n)$ s.t. $|X_r - X_q| \geq \lambda_n/2$ である。このような (q, r) の対は高々 2^n 個だから

$$\begin{aligned} P(\text{(a) が成立}) &= 2^n \sup_{s \in D_n} P(|X_{s+2^{-n}} - X_s| \geq \lambda_n/2) \leq 2^n (2/\lambda_n)^p \sup_{s \in D_n} E[|X_{s+2^{-n}} - X_s|^p] \\ &\leq 2^n 2^p \lambda_n^{-p} C 2^{-n(1+\varepsilon)} = C_2 2^{-n\varepsilon/2}. \end{aligned}$$

一方、(b) が成立すれば、 $\exists i, \exists(q, r) \in I_{n+i} \cap (D_{n+i+1} \times D_{n+i})$ s.t. $|X_r - X_q| \geq 3\lambda_n/2(i+1)^2\pi^2$ となる。このような (q, r) の対は高々 2^{n+i+1} 通りだから

$$\begin{aligned} P(\text{(b) が成立}) &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^{n+i+1} \sup_{s \in D_{n+i}} P(|X_{s+2^{-(n+i+1)}} - X_s| \geq 3\lambda_n/2(i+1)^2\pi^2) \\ &\leq C \sum_{i=0}^{\infty} 2^{n+i+1} 2^{-(n+i+1)(1+\varepsilon)} (2(i+1)^2\pi^2/3\lambda_n)^p \\ &\leq C_3 \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(n+i+1)\varepsilon} (i+1)^{2p} \lambda_n^{-p} \leq C_4 2^{-n\varepsilon/2}. \end{aligned}$$

両者を合わせて $P(A_n) \leq C_1 2^{-n\varepsilon/2}$ がわかった。 \square

系 1.5 確率過程 $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ が (1.4) を $\forall s, t \in [0, 1]$ に対し満たすなら、 X は連続修正をもつ。

証明: $t \notin D$ に対し $\tilde{X}_t := \lim_{s \in D, s \downarrow t} X_s$ とおく。定理 1.4 によりこの極限は存在し、 \tilde{X}_t は $t \in [0, 1]$ について連続となる。ところが、(1.4) から $s \in D, s \downarrow t$ のとき $X_s \rightarrow X_t$ in L^p だから $\forall t \in [0, 1]$ に対し $\tilde{X}_t = X_t$ a.s. がわかる。従って、 \tilde{X}_t は X_t の連続修正である。 \square

定理 1.2 の証明: 第1段: まず時間の区間を $[0, 1]$ に制限して Brown 運動 $(B_t)_{t \in [0,1]}$ を構成しよう。 $\Omega = \mathbb{R}^D, B_t(\omega) = \omega_t, t \in D, \omega \in \Omega$ ととる。 $D = \{t_1, t_2, \dots\}$ と適当に番号付け、 \mathbb{R}^n 上の確率測度 μ_n を次のように定義する。 $\{t_1, \dots, t_n\}$ を並べかえたものを $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ として

$$\mu_n(dx_1 \cdots dx_n) := \prod_{i=1}^n p(s_i - s_{i-1}, x_i - x_{i-1}) dx_i, \quad s_0 = 0, x_0 = 0$$

と定める。ただし、 $p(t, x)$ は (1.1) の熱核である ($s_1 = 0$ のとき $p(0, x_1) dx_1 = \delta_0(dx_1)$ と考える)。このとき、 $\{\mu_n\}$ が整合的であることを示すには、 p の半群性:

$$p(t+s, y-x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, z-x) p(s, y-z) dz, \quad t, s > 0$$

に注意すればよい。この等式は Chapman-Kolmogorov の等式とよばれる。従って、Kolmogorov の拡張定理から Ω 上の測度 μ が定まる。一方、

$$E^\mu[|B_t - B_s|^4] = \int_{\mathbb{R}^2} |x-y|^4 p(s, y) p(t-s, x-y) dy dx = 3|t-s|^2, \quad t > s, s, t \in D$$

であるから、Kolmogorov の正規化定理により $(B_t)_{t \in D}$ は μ -a.s. に一様連続である。 $t \notin D$ のときは $B_t := \lim_{s \in D, s \downarrow t} B_s$ と定めれば、 $(B_t)_{t \in [0,1]}$ は (Ω, μ) 上で定義された Brown 運動になる。

第 2 段: 時間の区間を $[0, \infty)$ に拡張する。このため、第 1 段で構成した Brown 運動を独立で可算個 $\{(B_t^i)_{t \in [0,1]}\}_{i \in \mathbb{N}}$ を準備する (直積確率空間をとればよい)。これらを用いて $B_t := \sum_{i=1}^{[t]} B_1^i + B_{t-[t]}^{[t]+1}$, $t \geq 0$ と定義すれば、 $(B_t)_{t \geq 0}$ は Brown 運動になる。 \square

$W(= W^1) := C([0, \infty), \mathbb{R})$, $W_0 := \{w \in W; w_0 = 0\}$ とおく。これらの空間に一様収束による位相を考える。 $\mathcal{B}(W), \mathcal{B}(W_0)$ をそれぞれの Borel 集合族とする。

定義 1.5 定義 1.4 で $\Omega := W_0, \mathcal{F} = \mathcal{B}(W_0)$ ととり、 $B_t(w) = w_t, w = (w_t)_{t \geq 0} \in W_0$ が Brown 運動となるような $(W_0, \mathcal{B}(W_0))$ 上の測度 P を Wiener 測度とよぶ。

定理 1.2 より Wiener 測度は存在し、しかも一意的であることがわかる。

定義 1.6 d 次元確率過程 $B_t = (B_t^i)_{1 \leq i \leq d} = (B_t^1, \dots, B_t^d), t \geq 0$ が d 次元 Brown 運動であるとは、各 B_t^i が Brown 運動で、かつ $\{B_t^i\}_{1 \leq i \leq d}$ は独立であるときにいう。

d 次元 Brown 運動の構成には、 d 個の独立な Brown 運動を準備して並べればよい。即ち、 $i = 1, \dots, d$ に対し確率空間 $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, P^i)$ 上で定義された Brown 運動 $B^i = (B_t^i)_{t \geq 0}$ をとり、 $\Omega = \prod_{i=1}^d \Omega^i, \mathcal{F} = \prod_{i=1}^d \mathcal{F}^i, P = \prod_{i=1}^d P^i$ と定め、 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \Omega$ に対し $B_t(\omega) = (B_t^1(\omega_1), \dots, B_t^d(\omega_d))$ ととれば、これは (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された d 次元 Brown 運動である。

1.3 簡単な性質

$B = (B_t)_{t \geq 0}$ を確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された 1 次元 Brown 運動として $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\{B_s; 0 \leq s \leq t\}$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^0 \vee \mathcal{N}$ とおく。ただし、 $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F}; P(N) = 0\}$ である。次は Brown 運動の定義よりすぐにわかる。

命題 1.6 (1) $E[B_t^{2p}] = (2p-1)!!t^p, E[B_t^{2p-1}] = 0, p \in \mathbb{N}$.

(2) $E[B_t B_s] = t \wedge s (= \min\{t, s\}), t, s \geq 0$.

(3) $B = (B_t)_{t \geq 0}$ は (\mathcal{F}_t) -martingale、即ち、 $E[B_t | \mathcal{F}_s] = B_s$ a.s. $0 < s < t$.

証明: (1) B_t は正規分布 $N(0, t)$ に従うから明らか。(2) $0 \leq s < t$ とする。定義 1.4 (3) より $B_t - B_s$ と \mathcal{F}_s は独立だから

$$E[B_t B_s] = E[(B_t - B_s)B_s] + E[B_s^2] = E[B_t - B_s]E[B_s] + s = s.$$

(3) (2) と同様に $A \in \mathcal{F}_s$ のとき、 $E[(B_t - B_s)1_A] = E[B_t - B_s]P(A) = 0$. \square

命題 1.7 次のように、 B から定義される新たな確率過程 B^a, B^b, B^c はいずれも Brown 運動である。ただし、 $s > 0, \gamma > 0$ は固定する。

(1) $B_t^a := B_{t+s} - B_s, t \geq 0$.

(2) $B_t^b := -B_t, t \geq 0$.

(3) $B_t^c := \gamma B_{t/\gamma^2}, t \geq 0$.

証明: 定理 1.2 を考慮すると (1.2) を示せばよい。ここでは、(1) のみ示す。(その他の場合も同様である。) 任意の $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ に対し、

$$\begin{aligned} E[g(B_{t_1}^a, \dots, B_{t_n}^a)] &= E[g(B_{t_1+s} - B_s, \dots, B_{t_n+s} - B_s)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} g(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0) p(s, x_0) \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}) dx_0 dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} p(s, x_0) dx_0 \int_{\mathbb{R}^n} g(x'_1, \dots, x'_n) \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x'_i - x'_{i-1}) dx'_1 \cdots dx'_n \\ &= E[g(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})]. \quad \square \end{aligned}$$

問 1.3 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ を d 次元 Brown 運動、 A を $d \times d$ 直交行列とすれば、 AB_t も d 次元 Brown 運動であることを示せ。

ヒント: $B = (B_t)_{t \geq 0}$ が d 次元 Brown 運動のとき、(1.1) の $p(t, x)$ の替わりに

$$p(t, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/2t}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d$$

をして (1.2) が $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して成立することを用いて、命題 1.7 と同様に示せ。

命題 1.8 B_t の $t \in [T_1, T_2]$, $0 \leq T_1 < T_2$ における全変動は、 $a.s.\omega$ に対し無限大である。

証明: 命題 1.7 から $T_1 = 0, T_2 = 1$ として証明すればよい。 $[0, 1]$ の分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ に対して $V_\Delta^{(2)}(\omega) = \sum_{j=1}^N \{B_{t_j}(\omega) - B_{t_{j-1}}(\omega)\}^2$ とおく。このとき、

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} E[(V_\Delta^{(2)} - 1)^2] = 0$$

を示す。ただし、 $\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq N} \{t_i - t_{i-1}\}$ とする。実際 $Z_i := \{B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)\}^2 - (t_i - t_{i-1})$ とすると $\{Z_i\}_{1 \leq i \leq N}$ は独立かつ $E[Z_i] = 0$ より

$$E[(V_\Delta^{(2)} - 1)^2] = E\left[\left(\sum_{j=1}^N Z_j\right)^2\right] = \sum_{j=1}^N E[Z_j^2] = \sum_{j=1}^N 2(t_j - t_{j-1})^2 \leq 2\|\Delta\| \rightarrow 0.$$

よって、 $V_\Delta^{(2)} \rightarrow 1$ in L^2 であるから、部分列 $\{\Delta_k\}$ をとり $V_{\Delta_k}^{(2)} \rightarrow 1$ a.s. とできる。

一方、 $\delta_\Delta(\omega) = \max_i |B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)|$ とおくと、 $B_t(\omega)$ は $[0, 1]$ 上で一様連続だから、 $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \delta_\Delta(\omega) = 0$ 。よって、全変動 $V(\omega) = \sup_\Delta V_\Delta(\omega)$, $V_\Delta(\omega) = \sum_{i=1}^N |B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)|$ について、上記の $\{\Delta_k\}$ に沿って考えると、

$$V(\omega) \geq V_{\Delta_k}(\omega) \geq \frac{V_{\Delta_k}^{(2)}(\omega)}{\delta_{\Delta_k}(\omega)} \rightarrow \infty \text{ a.s.}$$

を得る。 \square

Brown 運動の path の性質として以下のことが知られている。証明はそれぞれ [KS] p.109-, p.112-, p.114- を参照せよ。

命題 1.9 (1) $a.s.\omega$ に対し、 $B_t(\omega)$ は t について、いたるところ微分不可能である。

(2) 重複対数の法則:

$$\begin{aligned} \limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log 1/t}} &= 1 \text{ a.s.} & \liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log 1/t}} &= -1 \text{ a.s.} \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} &= 1 \text{ a.s.} & \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} &= -1 \text{ a.s.} \end{aligned}$$

(3) Hölder 連続性:

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\delta \log 1/\delta}} \max_{0 \leq s < t \leq 1: t-s \leq \delta} |B_t - B_s| = 1 \text{ a.s.}$$

1.4 Markov 性

$B = (B_t)_{t \geq 0}$ を d 次元 Brown 運動として、 $x \in \mathbb{R}^d$ から出発する Brown 運動を $(x + B_t)_{t \geq 0}$ で定義する。その $(W^d, \mathcal{B}(W^d))$ 上に定める分布を P_x とする。 P_x に関する平均値を $E_x[\cdot]$ と書く。確率空間 $(W^d, \mathcal{B}(W^d), P_x)$ 上の確率過程 $B_t(w), w \in W^d$ は標準座標関数、つまり $B_t(w) = w_t$ で与えられているとする。

問 1.4 (1) $Y = Y(w)$ が W^d 上の有界連続関数のとき、 $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto E_x[Y] \in \mathbb{R}$ は連続であることを示せ。(難しければ、 $Y(w) = \prod_{k=1}^n f_k(w_{t_k}), 0 \leq t_1 < \dots < t_n$ で $f_k \in C_b(\mathbb{R}^d)$ のときに示せ。)

(2) $Y = Y(w): W^d$ 上の有界 $\mathcal{B}(W^d)$ -可測関数に対し、 $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto E_x[Y] \in \mathbb{R}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -可測であることを示せ。

$\mathcal{B}(W^d)$ の部分加法族

$$\mathcal{F}_t^0 := \sigma(B_s; s \leq t), \quad \mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^0 \vee \mathcal{N}, \quad \mathcal{F}_t^* := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$$

を導入する。ただし、ここでは $\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{B}(W^d); P_x(N) = 0\}$ とする。 $(\mathcal{F}_t$ や \mathcal{F}_t^* は x に依存することに注意する。) 更に W^d 上のシフト作用素 $\theta_s: W^d \rightarrow W^d, s \geq 0$ を $(\theta_s w)_t := w_{t+s}$ によって定義する。 $B_t \circ \theta_s = B_{t+s}$ に注意する。

定理 1.10 (\mathcal{F}_t に関する Markov 性) $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall s \geq 0$ と $\forall Y = Y(w): W^d$ 上の有界 $\mathcal{B}(W^d)$ -可測関数に対し

$$E_x[Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s] = E_{B_s(w)}[Y], \quad P_x\text{-a.s. } w \in W^d \quad (1.5)$$

が成立する。

(1.5) は、(左辺) 時刻 s までの運動がわかったとして s 時より先の運動についての平均値で、それが (右辺) 現在いる位置から新たに出発する Brown 運動の法則に関する平均値に等しいことを意味している。

証明: (1.5) のためには有界 \mathcal{F}_s -可測関数 Z を任意に選んだとして次を示せばよい:

$$E_x[Y \circ \theta_s \cdot Z] = E_x[E_{B_s(w)}[Y] \cdot Z] \quad (1.6)$$

ただし、問題 1.4 より右辺の積分が well-defined であることに注意する。

第1段: $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を有界 Borel 可測として $Y = f(B_t), t \geq 0$ のときに示す。このためには $f(x) = e^{i\xi \cdot x}, \xi \in \mathbb{R}^d$ として示せば十分である。(このような f の1次結合をとり、極限操作をすればよい。) そこで $Y = e^{i\xi \cdot B_t}$ とすると

$$\begin{aligned} E_x[e^{i\xi \cdot B_t \circ \theta_s} \cdot Z] &= E_x[e^{i\xi \cdot B_{t+s}} \cdot Z] = E_x[e^{i\xi \cdot (B_{t+s} - B_s)} e^{i\xi \cdot B_s} \cdot Z] \\ &= E_x[e^{i\xi \cdot (B_{t+s} - B_s)}] E_x[e^{i\xi \cdot B_s} \cdot Z] = e^{-|\xi|^2 t/2} E_x[e^{i\xi \cdot B_s} \cdot Z] \end{aligned}$$

一方、 $E_y[e^{i\xi \cdot B_t}] = E_0[e^{i\xi \cdot (B_t + y)}] = e^{i\xi \cdot y} e^{-|\xi|^2 t/2}$ より結論を得る。

第2段: $Y = \prod_{k=1}^n f_k(B_{t_k}), 0 \leq t_1 < \dots < t_n$ で $f_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ が有界 Borel 可測のときに示す。これを n に関する帰納法で示す。 $n = 1$ は第1段で示した。 $n - 1$ まで成立するとすると

$$\begin{aligned} E_x[Y \circ \theta_s \cdot Z] &= E_x\left[\prod_{k=1}^n f_k(B_{t_k+s}) \cdot Z\right] = E_x\left[E_{B_{t_1+s}}\left[\prod_{k=2}^n f_k(B_{t_k-t_1})\right] \cdot f_1(B_{t_1+s})Z\right] \\ &= E_x\left[E_{B_s}\left[E_{B_{t_1}}\left[\prod_{k=2}^n f_k(B_{t_k-t_1})\right] f_1(B_{t_1})\right] \cdot Z\right] \\ &= E_x\left[E_{B_s}\left[f_1(B_{t_1}) \prod_{k=2}^n f_k(B_{t_k})\right] \cdot Z\right] = E_x[E_{B_s}[Y] \cdot Z] \end{aligned}$$

ここで1行目2つ目の等号では帰納法の仮定を $f_1(B_{t_1+s})Z$ が \mathcal{F}_{t_1+s} -可測であることに注意して用い、2行目の等号では第1段の結果を用い、3行目最初の等号は帰納法の仮定を $f_1(B_{t_1})$ が \mathcal{F}_{t_1} -可測であることに注意して(逆方向に)用いている。

第3段: 一般の Y については、問題 1.1 (1) の $\mathcal{B}(W^d) = \mathcal{B}_K(W^d)$ に注意すれば、第2段で考えたような Y の1次結合および極限操作により (1.6) は証明される。 \square

定理 1.11 (\mathcal{F}_t^* に関する Markov 性) $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$ であり、したがって、(1.6) は任意の $\mathcal{B}(W^d)$ -可測な有界関数 Y と任意の \mathcal{F}_s^* -可測な有界関数 Z に対して成立する。

証明: 第1段: (1.6) を \mathcal{F}_s^* -可測な有界関数 Z と $Y = f(B_t), f \in C_b(\mathbb{R}^d), t \geq 0$ のときに示す。 Z は $\mathcal{F}_{s+\varepsilon}$ -可測, $\forall \varepsilon > 0$ だから、定理 1.10 により

$$E_x[f(B_{t+s+\varepsilon})Z] = E_x[E_{B_{s+\varepsilon}}[f(B_t)]Z].$$

ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば f の有界連続性と B_t の連続性から、Lebesgue の優収束定理より左辺は $E_x[f(B_{t+s})Z]$ に収束する。一方、

$$g_t(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)p(t, z-y) dz$$

とおくと g_t は有界連続で $E_x[E_{B_{s+\varepsilon}}[f(B_t)]Z] = E_x[g_t(B_{s+\varepsilon})Z]$ より、同様に Lebesgue の優収束定理より右辺は $E_x[g_t(B_s)Z] = E_x[E_{B_s}[f(B_t)]Z]$ に収束するので結論を得る。

第2段: 第1段の主張は、極限操作をすることで任意の有界 Borel 関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ に対して証明できる。これより定理 1.10 の証明の第2段と同様に、 \mathcal{F}_s^* -可測な有界関数 Z と $Y = \prod_{k=1}^n f_k(B_{t_k}), 0 \leq t_1 < \dots < t_n$ で f_k が有界 Borel 可測に対しても (1.6) は示される。

第3段: Y を第2段のそれとし、 $t_i \leq s < t_{i+1}$ とする。このとき、第2段の結果から任意の \mathcal{F}_s^* -可測な有界関数 Z に対し

$$E_x[YZ] = E_x[Y_1 \circ \theta_s Y_2 \cdot Z] = E_x[E_{B_s}[Y_1]Y_2 \cdot Z],$$

ただし、 $Y_1 = \prod_{k=i+1}^n f_k(B_{t_k-s})$, $Y_2 = \prod_{k=1}^i f_k(B_{t_k})$ である。ここで、 $E_{B_s}[Y_1]Y_2$ は \mathcal{F}_s -可測である。即ち、上の形の Y に対して \mathcal{F}_s -可測な \tilde{Y} が存在して

$$E_x[Y \cdot 1_A] = E_x[\tilde{Y} \cdot 1_A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_s^* \quad (1.7)$$

となる。極限操作により、これは $\forall Y: \mathcal{B}(W^d)$ -可測な有界関数に対していえる (cf. 問1.5)。特に、 $Y = 1_G$, $G \in \mathcal{F}_s^*$ ととれば、 $E[(1_G - \widetilde{1}_G)1_A] = 0$, $\forall A \in \mathcal{F}_s^*$ である。ところが、 $1_G - \widetilde{1}_G$ は \mathcal{F}_s^* であるから、 $1_G - \widetilde{1}_G = 0$, P_x -a.s. である。ここで、 $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_s$ であることに注意すると 1_G は \mathcal{F}_s -可測であることがわかる。従って、 $G \in \mathcal{F}_s$, i.e., $\mathcal{F}_s^* \subset \mathcal{F}_s$ となり、“ \supset ” は自明だから証明は完了した。 \square

問 1.5 $\forall Y: \mathcal{B}(W^d)$ -可測な有界関数に対して、 \mathcal{F}_s -可測な \tilde{Y} が存在して (1.7) とできることを示せ。

証明の概略: 第2段の形の関数の有限和からなる関数列 $\{Y_n\}$ を Y に $L^1(P_x)$ -収束するようを選ぶことに注意する。このとき、 $|E[(\widetilde{Y}_m - \widetilde{Y}_n) \cdot 1_A]| \leq E[|Y_m - Y_n|]$ を示し、特に $A = \{\widetilde{Y}_m - \widetilde{Y}_n > 0\}$, $\{\widetilde{Y}_m - \widetilde{Y}_n < 0\}$ ととることで、 $\{\widetilde{Y}_n\}$ が $L^1(P_x)$ での Chauchy 列となることが証明できる。その極限を \tilde{Y} とするとき、これは $\{\widetilde{Y}_n\}$ の適当な部分列に対する a.s. 収束での極限でもあるので、 $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_s$ を考慮して \tilde{Y} が \mathcal{F}_s -可測であることが従う。 \square

系 1.12 (Blumenthal の 0-1 法則) $A \in \mathcal{F}_0 (= \mathcal{F}_0^*)$ ならば、 $P_x(A) = 0$ または 1 である。

証明: $A \in \mathcal{F}_0$ ならば

$$P_x(A) = E_x[1_A] = E_x[1_A \circ \theta_0 1_A] = E_x[E_{B_0}[1_A]1_A] = E[P_x(A)1_A] = P(A)^2.$$

故に、 $P_x(A) = 0$ または 1 である。 \square

例 1.2 原点から出発する Brown 運動に対し $\sigma_{(0,\infty)} := \inf\{t > 0; B_t \in (0, \infty)\}$ (Brown 運動が初めて正になる時刻) とすると、 $P(\sigma_{(0,\infty)} = 0) = 1$ となる。

実際、 $A := \{\sigma_{(0,\infty)} = 0\} \in \mathcal{F}_0$ より系 1.12 より $P(\sigma_{(0,\infty)} = 0) = 0$ or 1. ところが、 $\forall t > 0$ に対して $P(\sigma_{(0,\infty)} \geq t) \geq P(B_t \leq 0) = 1/2$ だから、 $t \downarrow 0$ として $P(\sigma_{(0,\infty)} = 0) \geq 1/2$ となるからである。(これは、Brown 運動は非常に揺れ動いているので即座に正の部分に行き、同時に対称性から負の部分に即時に達していることを意味している。)

1.5 Brown 運動の構成の別証明

この節ではランダムな係数をもつ Fourier 級数を用いた定理 1.2 の証明を与える。

このために独立でそれぞれ標準正規分布に従う確率変数列 $\{\xi_n^k\}$ と $L^2[0, 1]$ の完全正規直交系である次の $\{\psi_n^k\}$ を準備する:

$$\begin{aligned}\psi_0^1(t) &\equiv 1 \\ \psi_n^k(t) &= 2^{(n-1)/2} \left\{ 1_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}(t) - 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(t) \right\}, \quad k \in I(n), \quad n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

ただし、 $I(0) = \{1\}$, $I(n) = \{1, 3, \dots, 2^n - 1\}$ ($n \in \mathbb{N}$) とする。このとき、

$$B_t^{(N)}(\omega) = \sum_{n=0}^N \sum_{k \in I(n)} \xi_n^k(\omega) \int_0^t \psi_n^k(s) ds \quad (1.8)$$

とおく。(実際は $L^2[0, 1]$ の完全正規直交系であればよい (伊藤-西尾の結果)。)

補題 1.13 $\{\psi_n^k; k \in I(n), n = 0, 1, \dots\}$ は $L^2[0, 1]$ の完全正規直交系である。

証明: $g \in L^2[0, 1]$ として、 $\forall k \in I(n), n = 0, 1, \dots$ に対して $\int_0^1 g(t) \psi_n^k(t) dt = 0$ を満たすとき、 $g = 0$ a.e. を示せばよい。更にこのためには、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} g(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \quad (1.9)$$

を示せばよい。これは $\{k/2^n; k = 0, 1, \dots, 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ が $[0, 1]$ で稠密であることによる。 $n = 0$ のときは $\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 g(t) \psi_0^1(t) dt = 0$ となり成立する。 $n - 1$ のとき成立する。 n のとき、 k が偶数であれば $k' = k/2$ と書くとき

$$\begin{aligned}1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(t) &= \frac{1}{2} \left(1_{[\frac{k'}{2^{n-1}}, \frac{k'+1}{2^{n-1})}(t) + 2^{-(n-1)/2} \psi_n^{k+1}(t) \right) \quad \text{であるから} \\ \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} g(t) dt &= \frac{1}{2} \left(\int_{k'/2^{n-1}}^{(k'+1)/2^{n-1}} g(t) dt - 2^{-(n-1)/2} \int_0^1 g(t) \psi_n^k(t) dt \right) = 0.\end{aligned}$$

$$\text{一方、} \int_{(k+1)/2^n}^{(k+2)/2^n} g(t) dt = \int_{k'/2^{n-1}}^{(k'+1)/2^{n-1}} g(t) dt - \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} g(t) dt = 0. \quad \square$$

補題 1.14 $a.a.\omega$ に対して $\{B_t^{(N)}(\omega); 0 \leq t \leq 1\}$ は $N \rightarrow \infty$ のとき $[0, 1]$ 上で一様収束する。

証明: $b_n(\omega) = \max_{k \in I(n)} |\xi_n^k(\omega)|$ とおく。 $x > 0$ に対して

$$\begin{aligned}P(|\xi_n^k| > x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty \frac{u}{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \quad \text{より} \\ P(b_n > n) &= P\left(\bigcup_{k \in I(n)} \{|\xi_n^k| > n\} \right) \leq 2^n P(|\xi_n^1| > n) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n e^{-\frac{n^2}{2}}}{n}, \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

従って、 $\sum_n P(b_n > n) < \infty$ であるから Borel-Cantelli の補題より、 $\tilde{\Omega} = \bigcup_{N=1}^\infty \bigcap_{n=1}^\infty \{b_n \leq n\}$ とおくと $P(\tilde{\Omega}) = 1$ で、 $\omega \in \tilde{\Omega}$ ならば $N(\omega)$ が存在して $n \geq N(\omega)$ ならば $b_n(\omega) \leq n$ で

あるから

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \sum_{n=N(\omega)+1}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} |\xi_n^k(\omega)| \int_0^t \psi_n^k(s) ds \leq \sum_{n=N(\omega)+1}^{\infty} n 2^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

よって、(1.8) で定義した $\{B_t^{(N)}(\omega); 0 \leq t \leq 1\}$ は $[0, 1]$ 上で一様収束する。 \square

定理 1.2 の別証明: 第 1 段: 補題 1.14 より $B_t = \lim_{N \rightarrow \infty} B_t^{(N)}$ が存在するとしてよい。この $(B_t)_{t \in [0,1]}$ が Brown 運動であることを示す。 $t \mapsto B_t(\omega)$ の連続性は補題 1.14 より明らかであるから (cf. 注意 1.3)、このためには $\forall 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$ に対して $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}_{j=1}^m$ が独立でそれぞれ平均 0, 分散 $t_j - t_{j-1}$ の正規分布に従うことを示せばよい。これは次と同値である: $\forall \lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m$ に対して

$$E \left[\exp \left\{ i \sum_{j=1}^m \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right\} \right] = \prod_{j=1}^m \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1}) \right\}.$$

$\lambda_{m+1} = 0, S_n^k(t) = \int_0^t \psi_n^k(s) ds$ と書くとき、 $\{\xi_n^k\}$ は独立で $N(0, 1)$ に従うから

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left\{ i \sum_{j=1}^m \lambda_j (B_{t_j}^{(N)} - B_{t_{j-1}}^{(N)}) \right\} \right] &= E \left[\exp \left\{ i \sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) B_{t_j}^{(N)} \right\} \right] \\ &= E \left[\exp \left\{ -i \sum_{n=0}^N \sum_{k \in I(n)} \xi_n^k \sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) S_n^k(t_j) \right\} \right] \\ &= \prod_{n=0}^N \prod_{k \in I(n)} E \left[\exp \left\{ -i \xi_n^k \sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) S_n^k(t_j) \right\} \right] \\ &= \prod_{n=0}^N \prod_{k \in I(n)} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) S_n^k(t_j) \right\}^2 \right] \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) (\lambda_{j'+1} - \lambda_{j'}) \sum_{n=0}^N \sum_{k \in I(n)} S_n^k(t_j) S_n^k(t_{j'}) \right]. \end{aligned}$$

補題 1.13 と Parseval の等式から $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} S_n^k(t_j) S_n^k(t_{j'}) = \int_0^1 1_{[0, t_j]} 1_{[0, t_{j'}]} dt = t_j \wedge t_{j'}$ であるので、 $N \rightarrow \infty$ として (右辺は Lebesgue の有界収束定理を用いている)

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left\{ i \sum_{j=1}^m \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right\} \right] &= \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) (\lambda_{j'+1} - \lambda_{j'}) t_j \wedge t_{j'} \right] \\ &= \exp \left\{ -\sum_{j=1}^m \sum_{j'=j+1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) (\lambda_{j'+1} - \lambda_{j'}) t_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j)^2 t_j \right\} \\ &= \exp \left\{ -\sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j) (-\lambda_{j+1}) t_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\lambda_{j+1} - \lambda_j)^2 t_j \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_{j+1}^2 - \lambda_j^2) t_j - \frac{1}{2} \lambda_m^2 t_m \right\} = \prod_{j=1}^m \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1}) \right\}. \end{aligned}$$

第 2 段: p.8 の第 2 段と全く同様だから略す。 \square

2 Martingales

2.1 条件付平均値と条件付確率

まず、条件付平均値と条件付確率の定義と簡単な性質を復習しておく。定義 2.1 と命題 2.1 について詳しくは [F1] を参照せよ。

確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された可積分な確率変数 X と、 \mathcal{F} の部分 σ -加法族 \mathcal{G} が与えられたとする。

$$Q(B) := E[X, B] \equiv \int_B X(\omega)P(d\omega), \quad B \in \mathcal{G}$$

とおくと、 Q は (Ω, \mathcal{G}) 上の符号付測度となる。このとき Q は P に関して絶対連続だから、Radon-Nikodym の定理 (前期の定理 1.6, 系 1.7) より \mathcal{G} -可測な確率変数 Y が存在して

$$Q(B) = \int_B Y(\omega)P(d\omega), \quad B \in \mathcal{G}$$

と書ける。

定義 2.1 (1) 上記の Y を $E[X|\mathcal{G}]$ と書き、 \mathcal{G} の下での X の条件付平均値または条件付期待値とよぶ。

(2) $A \in \mathcal{F}$ に対し $P(A|\mathcal{G}) := E[1_A|\mathcal{G}]$ とおいて、これを A の条件付確率とよぶ。

条件付期待値 $E[X|\mathcal{G}]$ や条件付確率 $P(A|\mathcal{G})$ は確率変数であることに注意する。

命題 2.1 $X, Y, X_n, n \in \mathbb{N}$ は可積分な確率変数とする。

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対し、 $E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[Y|\mathcal{G}]$ a.s. である。

(2) $X \geq 0$ a.s. ならば $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$ a.s. である。

(3) X が \mathcal{G} -可測で、積 XY が可積分ならば $E[XY|\mathcal{G}] = XE[Y|\mathcal{G}]$ a.s.

特に、 $E[X|\mathcal{G}] = X$ a.s. である。

(4) \mathcal{H}, \mathcal{G} を \mathcal{F} の部分 σ -加法族で $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ とすれば $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$ a.s.

特に、 $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$ である。

(5) (Jensen の不等式) ψ が \mathbb{R} 上の下に凸な関数で、 $\psi(X)$ が可積分ならば

$\psi(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[\psi(X)|\mathcal{G}]$ a.s.

(6) $X_n \rightarrow X$ in L^1 ならば $E[X_n|\mathcal{G}] \rightarrow E[X|\mathcal{G}]$ in L^1 である。

(7) X と \mathcal{G} が独立ならば $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ a.s. である。

次に正則条件付確率について述べる。

条件付確率は、互いに素な $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ に対して $P(A_1 \cup A_2|\mathcal{G}) = P(A_1|\mathcal{G}) + P(A_2|\mathcal{G})$ a.s. を満たすが、この除外集合は A_1, A_2 に依存し、一般には完全加法制をもたない。しかし、標本空間が“良い空間”の場合条件付確率として以下のような都合の良い性質をもつものが取れることが知られている。

定義 2.2 次の条件を満たす系 $p = \{p(\omega, A); \omega \in \Omega, A \in \mathcal{F}\}$ が存在するとき、 p を \mathcal{G} の下での P の正則条件付確率という。

(1) $\forall \omega \in \Omega$ を固定すると $p(\omega, \cdot)$ は (Ω, \mathcal{F}) 上の確率測度である。

(2) $\forall A \in \mathcal{F}$ を固定すると $p(\cdot, A)$ は \mathcal{G} -可測関数である。

(3) $P(A \cap B) = \int_B p(\omega, A) P(d\omega), \forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{G}$.

(Ω, \mathcal{F}) が標準可測空間⁷、例えば Ω がポーランド空間で $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ のときは、正則条件付確率が存在することが知られている。ここでは、その結果のみ紹介する。証明は [IW] p.13-, または [SV] p.12- を見よ。ただし、[SV] ではポーランド空間の場合のみに限り証明を与えており、また、正則条件付確率を “conditional probability distribution” と呼び定理の後者を満たす場合を “regular” と読んでいる。

定理 2.2 (Ω, \mathcal{F}) は標準可測空間で P は (Ω, \mathcal{F}) 上の確率測度であるとする。 \mathcal{G} が \mathcal{F} の部分 σ -加法族であるとき、 \mathcal{G} の下での P の正則条件付確率 $p = \{p(\omega, A); \omega \in \Omega, A \in \mathcal{F}\}$ が唯一つ存在する。特に、 \mathcal{H} が \mathcal{G} の部分 σ -加法族で可算生成であれば、 \mathcal{G} -可測な零集合 N が存在して、 $\omega \notin N$ ならば $p(\omega, A) = 1_A(\omega), \forall A \in \mathcal{H}$ となるようにできる。

2.2 Stopping time

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ を確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された filtration とし、次の仮定をおく。

仮定 F $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ は右連続で零集合を含む。

定義 2.3 $\sigma : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ が $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ に関する *stopping time* (あるいは *Markov 時刻*) であるとは

$$\{\sigma \leq t\} \equiv \{\omega; \sigma(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0$$

が成立するときという。

命題 2.3 次の (i)–(iv) は互いに同値である。

(i) σ は *stopping time*.

(ii) $\{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$.

(iii) $\{\sigma > t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$.

(iv) $\{\sigma \geq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$.

証明: (i) と (iii), (ii) と (iv) の同値性は明らか。(i) (ii) は

$$\{\sigma < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\sigma \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_t$$

による。(ii) (i) は

$$\{\sigma \leq t\} = \bigcap_{n=N}^{\infty} \{\sigma < t + 1/n\} \in \mathcal{F}_{t+1/N}$$

が任意の $\forall N \in \mathbb{N}$ で成立するので、 (\mathcal{F}_t) の右連続性から従う。 \square

⁷可測空間 (Ω, \mathcal{F}) が、 $\{1, \dots, n\}, \mathbb{N}, [0, 1]$ のどれかと Borel 同型るとき、即ち、 Ω からこれらのどれかの集合 (σ -加法族は Borel 集合族を考える) への全単射 φ で、 φ, φ^{-1} がともに可測であるものが存在するとき、標準可測空間という。

命題 2.4 $\sigma, \tau, \sigma_n, n \in \mathbb{N}$ を *stopping time* とする。

(i) $\sigma + \tau, \sigma \vee \tau, \sigma \wedge \tau$ はいずれも *stopping time*.

(ii) $\sigma_n \leq \sigma_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ または $\sigma_n \geq \sigma_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ は *stopping time*.

証明: それぞれ次に注意すればよい。ただし、 $\mathbb{Q}_t = (\mathbb{Q} \cap [0, t]) \cup \{t\}$ とした。

(i) $\{\sigma + \tau \leq t\} = \bigcap_{n=N}^{\infty} \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_t} [\{\sigma \leq r\} \cap \{\tau \leq t - r + 1/n\}], \forall N \in \mathbb{N}$.

$\{\sigma \vee \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\}, \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\}$.

(ii) $\{\sigma_n\}$ が単調増加のとき $\{\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\sigma_n \leq t\}$,

$\{\sigma_n\}$ が単調減少のとき $\{\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\sigma_n < t\}$. \square

例 2.1 (X_t) を (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された (\mathcal{F}_t) -適合な d 次元連続確率過程として、 X の $E \subset \mathbb{R}^d$ への到達時間 (*first hitting time*) を

$$\sigma_E(\omega) = \inf\{t > 0; X_t(\omega) \in E\} \quad (2.1)$$

で定義する。 E が開集合または閉集合ならば σ_E は *stopping time* である。一般に確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) が完備ならば $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し σ_E は *stopping time* であることが知られている⁸。

証明: ここでは E が開集合か閉集合のときのみを示す。 E が開集合のときは

$$\{\sigma_E < t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0, t)} \{X_r \in E\} \in \mathcal{F}_t$$

より分かる。 E が閉集合のとき、 $E_n = \{x \in \mathbb{R}^d; d(x, E) < \frac{1}{n}\}$ とおくと、各 E_n は開集合であるから σ_{E_n} は *stopping time*。一方、 $E_n \downarrow E$ であるから、 $\sigma_{E_n}(\omega) \downarrow \sigma_E(\omega), \forall \omega \in \Omega$ となり、命題 2.4 (ii) と合わせ σ_E は *stopping time* を得る。 \square

定義 2.4 *stopping time* σ に対して

$$\mathcal{F}_\sigma = \{A \in \mathcal{F}; \forall t \geq 0 \text{ に対し } A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t\} \quad (2.2)$$

とおく。

問 2.1 σ が *stopping time* のとき (2.2) で定義した \mathcal{F}_σ が σ -加法族をなすことを示せ。また、 $\sigma \equiv t$ (定数) のとき、(2.2) で定義した \mathcal{F}_σ と \mathcal{F}_t が一致することを示せ。

命題 2.5 $\sigma, \tau, \sigma_n, n \in \mathbb{N}$ を *stopping time* とする。

(i) σ は \mathcal{F}_σ -可測である。

(ii) $\sigma \leq \tau$ ならば、 $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ 。

(iii) (右連続性の一般化) $\forall \omega \in \Omega$ に対し $\sigma_n(\omega) \downarrow \sigma(\omega)$ ならば、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\sigma_n} = \mathcal{F}_\sigma$ 。

証明: (i): $\{\sigma \leq s\} \in \mathcal{F}_\sigma, \forall s \geq 0$ を示せば良い。このためには $\{\sigma \leq s\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$ を示せば良いが、 $\{\sigma \leq s\} \cap \{\sigma \leq t\} = \{\sigma \leq t \wedge s\} \in \mathcal{F}_{t \wedge s} \subset \mathcal{F}_t$ だから示された。

(ii): $A \in \mathcal{F}_\sigma$ とする。このとき、 $A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \{\sigma \leq t\} \supset \{\tau \leq t\}$ より、 $A \cap \{\tau \leq t\} = [A \cap \{\sigma \leq t\}] \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$ となるから $A \in \mathcal{F}_\tau$ を得る。

⁸証明は次の本の p.51 を見よ。C.Dellacherie: Capacités et Processus Stochastiques. Springer, 1972.

(iii): (ii) より “ \subset ” は従う。逆に $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\sigma_n}$ とすると、 $A \cap \{\sigma < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{\sigma_n < t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$ となるから $A \in \mathcal{F}_\sigma$ を得る (cf. 命題 2.3 の証明 (ii) (i)). \square

2.3 Martingales

確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) と、仮定 F を満たす filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ が与えられているとする。

定義 2.5 右連続な (実数値) 確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ についてマルチンゲール (martingale) とは

- (i) $\forall t \geq 0$ に対し $E[|X_t|] < \infty$.
- (ii) $X = (X_t)_{t \geq 0}$ は (\mathcal{F}_t) -adapted.
- (iii) $\forall 0 \leq s \leq t$ に対し $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ a.s.

の 3 条件を満たすときにいう。条件 (iii) で $E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$ a.s. が成立するとき X を劣マルチンゲール (submartingale), $E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$ a.s. のとき X を優マルチンゲール (supermartingale) という。

問 2.2 1次元 Brown 運動 $B = (B_t)$ に対し $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_s; 0 \leq s \leq t\} \vee \mathcal{N}$ とおく。定理 1.11 で見たように (\mathcal{F}_t^B) は仮定 F を満たす。このとき、命題 1.6 (3) で見たように次の (1) が成り立つ。次の (2), (3) が成立することを示せ。

- (1) (B_t) は (\mathcal{F}_t^B) に関してマルチンゲール。
- (2) $X_t = B_t^2 - t$ とおくと、 (X_t) は (\mathcal{F}_t^B) に関してマルチンゲール。
- (3) $\sigma \in \mathbb{R}$ に対し $Y_t = e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$ とおくと、 (Y_t) は (\mathcal{F}_t^B) に関してマルチンゲール。

問 2.3 $p \geq 1$ とする。 $X = (X_t)$ がマルチンゲールまたは非負劣マルチンゲールで p 乗可積分であるとき、 $(|X_t|^p)$ は劣マルチンゲールであることを示せ。

定理 2.6 (Doob の不等式) $X = (X_t)$ は劣マルチンゲールとし、 $\lambda > 0, p > 1$ とする。このとき、

- (i) $P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} X_s \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E\left[X_t, \sup_{0 \leq s \leq t} X_s \geq \lambda\right]$.
- (ii) 特に $\forall t \geq 0$ に対して $X_t(\omega) \geq 0$ a.s. ならば

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} X_s \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E[X_t]$$

(iii) X が $E[|X_t|^p] < \infty, t \geq 0$ を満たすマルチンゲール、または非負劣マルチンゲールならば、

$$E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p\right] \leq \frac{p}{p-1} E[|X_t|^p]$$

証明: $t_k = kt/n$ とすると $(X_{t_k})_k$ は離散劣マルチンゲールとなる。よって、[F1, p.168] 定理 6.17 により

$$P\left(\sup_{1 \leq k \leq n} X_{t_k} \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E\left[X_t, \sup_{1 \leq k \leq n} X_{t_k} \geq \lambda\right]$$

を得る。 (X_t) は右連続であるから、 $n \rightarrow \infty$ として (i) を得る。(ii) は (i) から、ただちに従う。(iii) を示すために $Y = \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
E[Y^p] &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} P(Y \geq \lambda) d\lambda \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \frac{1}{\lambda} E[|X_t|, Y \geq \lambda] d\lambda \quad ((i) \text{ を用いた}) \\
&= p \int_0^\infty \lambda^{p-2} d\lambda \int_\Omega |X_t| 1_{\{Y \geq \lambda\}} dP \quad (\text{Fubini の定理を用いた}) \\
&= \frac{p}{p-1} E[Y^{p-1} |X_t|] \leq \frac{p}{p-1} E[Y]^{(p-1)/p} E[|X_t|^p]^{1/p} \quad (\text{Hölder の不等式})
\end{aligned}$$

最後に両辺を $E[Y]^{(p-1)/p}$ で割り、 p 乗すれば (iii) の式は得られる。 \square

定理 2.7 (Doobの任意抽出定理 (optional sampling theorem)) σ, τ を有界な *stopping time* で $\sigma \leq \tau$ とする。このとき $X = (X_t)$ が劣マルチンゲールならば

$$E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq X_\sigma \quad a.s. \quad (2.3)$$

となる。特に、 $X = (X_t)$ がマルチンゲールならば (2.3) で等号が成立する。ただし X_τ は $X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$ により定義される確率変数を表す。 X_σ も同様である。

証明: $\sigma_n(\omega) = \frac{[n\sigma(\omega)+1]}{n}, \tau_n(\omega) = \frac{[n\tau(\omega)+1]}{n}$ とおくと、 σ, τ は有界だから σ_n, τ_n は有限個の値しか取らないので離散劣マルチンゲールの任意抽出定理 [F1, p.165] 定理 6.14 により

$$E[X_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_n}] \geq X_{\sigma_n} \quad a.s.$$

となる。故に $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$ であるから、 $\forall A \in \mathcal{F}_\sigma$ に対し

$$E[X_{\tau_n}, A] \geq E[X_{\sigma_n}, A]$$

を得る。 $\sigma_n(\omega) \downarrow \sigma(\omega), \tau_n(\omega) \downarrow \tau(\omega)$ と (X_t) の右連続性により、もし $\{X_{\tau_n}\}_n, \{X_{\sigma_n}\}_n$ がともに一様可積分であれば [F1, p.69] 定理 2.57 により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{\tau_n}, A] = E[X_\tau, A], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{\sigma_n}, A] = E[X_\sigma, A]$$

となり結論が得られる。 X は劣マルチンゲールだから $E[X_{\tau_n}] \geq E[X_{\tau_{n+1}}], n \in \mathbb{N}$ となり、 $\inf_n E[X_{\tau_n}] \geq E[X_0] > -\infty$ とできる。これより $\forall \varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ を $E[X_{\tau_N}] < \inf_n E[X_{\tau_n}] + \varepsilon$ ととれる。よって、 $\lambda > 0$ に対して $n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned}
E[|X_{\tau_n}|, |X_{\tau_n}| > \lambda] &= E[X_{\tau_n}, X_{\tau_n} > \lambda] + E[X_{\tau_n}, X_{\tau_n} \geq -\lambda] - E[X_{\tau_n}] \\
&\leq E[X_{\tau_N}, X_{\tau_n} > \lambda] + E[X_{\tau_N}, X_{\tau_n} \geq -\lambda] - E[X_{\tau_N}] + \varepsilon \leq E[|X_{\tau_N}|, |X_{\tau_n}| > \lambda] + \varepsilon, \\
P(|X_{\tau_n}| > \lambda) &\leq \frac{1}{\lambda} E[|X_{\tau_n}|] = \frac{1}{\lambda} (2E[X_{\tau_n} \vee 0] - E[X_{\tau_n}]) \leq \frac{1}{\lambda} (2E[X_0 \vee 0] - \inf_n E[X_{\tau_n}])
\end{aligned}$$

となり、 $\sup_{n \geq N} P(|X_{\tau_n}| > \lambda) \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$) であるから、 $\{X_{\tau_n}\}_n$ は一様可積分となる。 $\{X_{\sigma_n}\}_n$ についても同様に示される。 \square

注意 2.1 定理 2.7 で σ, τ が有界という仮定は本質的である。例えば、原点から出発する 1 次元連続確率過程 (X_t) に対し、 $\sigma := 0, \tau := \sigma_{\{1\}}$ (点 1 への到達時刻) ととる。このとき、 $\tau < \infty$ *a.s.* ならば (実際に Brown 運動ではそうなる cf. 例 2.2) $X_\sigma = 0, X_\tau = 1$ *a.s.* だから、定理 2.7 の結論は成立しない。

マルチンゲール性の応用として、 \mathbb{R} の内部から出発するとき a, b のどちらの端から脱出するのかその確率を求めよう。

命題 2.8 連続マルチンゲール $M = (M_t)$ が $M_0 = x \in (a, b)$ で $\tau := \sigma_{[a,b]^c} < \infty$ a.s. を満たすならば

$$P(M_\tau = a) = \frac{b-x}{b-a}, \quad P(M_\tau = b) = \frac{x-a}{b-a}. \quad (2.4)$$

証明: M はマルチンゲールだから任意抽出定理により $x = E[M_{\tau \wedge t}]$, $t > 0$ である。 $|M_{\tau \wedge t}| \leq |a| \vee |b|$ である Lebesgue の収束定理により $t \rightarrow \infty$ のとき $\tau < \infty$ a.s. だから

$$x = E[M_\tau] = aP(M_\tau = a) + bP(M_\tau = b)$$

を得る。一方 $\tau < \infty$ a.s. より $P(M_\tau = a) + P(M_\tau = b) = 1$. これを連立させて解いて (2.4) を得る。□

例 2.2 $x \in (a, b)$ から出発する 1次元 Brown 運動 $B = (B_t)$ について $\tau := \sigma_{[a,b]^c} < \infty$ a.s. となる。更に $c \in \mathbb{R}$ に対して $\sigma_{\{c\}} < \infty$ a.s. となる。

証明: 問 2.2 (ii) より $B_t^2 - t$ はマルチンゲールだから、任意抽出定理より

$$E[\tau \wedge t] = E[B_{\tau \wedge t}^2] \leq (|a| \vee |b|)^2, \quad \forall t \geq 0$$

となる。 $t \rightarrow \infty$ として Fatou の補題より $E[\tau] \leq (|a| \vee |b|)^2$ となり、 $\tau < \infty$ a.s. が従う。特に (2.4) が成立することがわかるが、ここで $b \rightarrow \infty$ とすれば $P(B_{\sigma_{\{a\}}} = a) = 1$, $a \rightarrow -\infty$ とすれば $P(B_{\sigma_{\{b\}}} = b) = 1$ を得るので、 $\forall c \in \mathbb{R}$ に対して $\sigma_{\{c\}} < \infty$ a.s. も従う。□

2.4 Brown 運動の強 Markov 性

ここでは d 次元 Brown 運動を考える。このため、§1.4 のように、 $x \in \mathbb{R}^d$ から出発する Brown 運動の $(W^d, \mathcal{B}(W^d))$ 上に定める分布を P_x とし、確率過程 (標準座標関数) $B_t(w) = w_t$, $w \in W^d$, $t \geq 0$ と filtration (\mathcal{F}_t) が与えられているとする。ただし、ここでは (\mathcal{F}_t) は右連続で $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{B}(W^d); P_x(N) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^d\}$ を含むとする。

(\mathcal{F}_t) に関する stopping time σ に対し、時間を σ だけずらすシフト作用素 $\theta_\sigma : W^d \cap \{\sigma < \infty\} \rightarrow W^d$ を $(\theta_\sigma w)_t := w_{t+\sigma(w)}$, $t \geq 0$ によって定義する。このとき、定理 1.10, 1.11 はランダムな時間の場合に拡張される。

定理 2.9 (強 Markov 性) $\forall x \in \mathbb{R}^d$ と $\forall Y = Y(w) : W^d$ 上の有界 $\mathcal{B}(W^d)$ -可測関数に対し

$$E_x[Y \circ \theta_\sigma | \mathcal{F}_\sigma] = E_{B_\sigma}[Y], \quad P_x\text{-a.s. } w \in \{\sigma < \infty\}. \quad (2.5)$$

証明: 定理 1.10, 1.11 の証明と同様に $\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ とし $Y = f(B_t)$ に対し (2.5) を、即ち、

$$E_x[f(B_{t+\sigma}), A \cap \{\sigma < \infty\}] = E_x[E_{B_\sigma}[f(B_t)], A \cap \{\sigma < \infty\}], \quad A \in \mathcal{F}_\sigma$$

を証明すればよい。(実は \mathcal{N} の取り方が定理 1.10 とは異なるため少し工夫が必要である。) 定理 2.7 と同様に、 σ を離散化し $\sigma_n = ([n\sigma] + 1)/n$ を考える。 σ_n も stopping time だから、 $\forall A \in \mathcal{F}_\sigma$ をとれば

$$E_x[f(B_{t+\sigma_n}), A \cap \{\sigma < \infty\}] = \sum_{k=1}^{\infty} E_x[f(B_{t+\sigma_n}), A \cap \{\sigma_n = k/n\}] \quad (2.6)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E_x[E_{B_{\sigma_n}}[f(B_t)], A \cap \{\sigma_n = k/n\}] = E_x[E_{B_{\sigma_n}}[f(B_t)], A \cap \{\sigma < \infty\}]. \quad (2.7)$$

ここで第2の等号は $A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$ であるから $A \cap \{\sigma_n = k/n\} \in \mathcal{F}_{k/n}$ に注意して Brown 運動の Markov 性を用いた。

$\{\sigma < \infty\}$ 上では $\sigma_n \downarrow \sigma$ であることに注意する。 f, B_t の連続性から Lebesgue の収束定理より (2.6) の左辺は $E_x[f(B_{t+\sigma}), A \cap \{\sigma < \infty\}]$ に収束する。一方、(1.1) により

$$E_{B_{\sigma_n}}[f(B_t)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)p(t, x - B_{\sigma_n}) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x)p(t, x - B_\sigma) dx = E_{B_\sigma}[f(B_t)]$$

を得る。よって、(2.7) の右辺は $E_x[E_{B_\sigma}[f(B_t)], A \cap \{\sigma < \infty\}]$ に収束するので証明は完了した。 \square

例 2.3 (反射原理) 原点から出発する 1次元 Brown 運動 B_t について、 $m_t := \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$ とおけば $\forall a \geq 0, x \geq 0, t > 0$ の対し

$$P(B_t < a - x, m_t \geq a) = P(B_t > a + x).$$

証明: 点 a への到達時間 $\sigma := \sigma_{\{a\}}$ は stopping time だから、強 Markov 性より

$$\begin{aligned} P(B_t > a + x) &= P(\sigma \leq t, B_t > a + x) \\ &= E[P_{B_\sigma}(B_{t-\sigma} > a + x), \sigma \leq t] = E[P_{B_\sigma}(B_{t-\sigma} < a - x), \sigma \leq t] \\ &= P(\sigma \leq t, B_t < a - x) = P(B_t < a - x, m_t \geq a). \end{aligned}$$

2行目の等号は $\{\sigma \leq t\}$ 上で $B_\sigma = a$ なることと対称性: $P_a(B_{t-\sigma} > a + x) = P_a(B_{t-\sigma} < a - x)$ を用いた。 \square

例 2.4 原点から出発する 1次元 Brown 運動 B_t について

$$P(\sup_{0 \leq s \leq t} B_s \geq a) = 2P(B_t \geq a), \quad \forall a \geq 0, t > 0.$$

証明: $P(m_t \geq a) = P(B_t < a \leq m_t) + P(B_t \geq a)$ であるが、例 2.3 を $x = 0$ として用いると右辺第1項は $P(B_t > a)$ に等しいので $P(B_t = a) = 0$ だから結論を得る。 \square

問 2.4 原点から出発する 1次元 Brown 運動 B_t について、点 $a \neq 0$ への到達時間 $\sigma_{\{a\}} := \inf\{t > 0; B_t = a\}$ の確率密度関数が $\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$, $t > 0$ となることを示せ。

2.5 2次変分

以下、確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) と仮定 F を満たす filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ が与えられているとする。

定義 2.6 劣マルチンゲール $X = (X_t)$ がクラス (DL) に属するとは、任意の $a > 0$ に対して $\{X_{\sigma \wedge a}; \sigma \text{ は stopping time}\}$ が一様可積分になるときをいう。

定理 2.10 (Doob-Meyer 分解) 劣マルチンゲールがクラス (DL) に属するならば、マルチンゲール (M_t) と $A_0 = 0$ となる (\mathcal{F}_t) -適合な右連続増加過程 (A_t) が存在し、 $X_t = M_t + A_t$, $t \geq 0$ とできる。ここで、 (A_t) は自然増加過程にとれる。さらに、 (A_t) を自然増加過程とるときこのような分解は一意である。

ここで、 (A_t) が増加とは $t \leq s$ ならば $A_t \leq A_s$ a.s. なるときをいい、自然増加過程であるとは、任意の有界マルチンゲール (M_t) に対して $E[\int_{(0,t]} M_s dA_s] = E[\int_{(0,t]} M_s - dA_s]$ なるときにいう。

ここでは、連続なマルチンゲール (M_t) に対して $X_t = M_t^2$ から定まる (X_t) に限り Doob-Meyer 分解の証明を与える⁹。もし、 M_t が 2 乗可積分ならば問 2.3 より (X_t) は劣マルチンゲールであり、任意の stopping time σ に対して

$$E[|X_{\sigma \wedge a}|, |X_{\sigma \wedge a}| \geq \lambda] \leq E[|X_a|, |X_{\sigma \wedge a}| \geq \lambda] \leq E\left[|X_a|, \sup_{0 \leq t \leq a} |X_t| \geq \lambda\right].$$

一方、Doob の不等式 (ii) より $P(\sup_{0 \leq t \leq a} |X_t| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E[|X_a|] \rightarrow 0$ となり、上式の右辺 $\rightarrow 0$ がわかり、 (X_t) がクラス (DL) に属することが証明される。またこの場合、増加過程 A_t は連続となるので“自然”である。

まず記号を導入する: 確率過程 (A_t) が $A_0 = 0$ a.s., (\mathcal{F}_t) -adapted で連続かつ $A_{t_1} \leq A_{t_2} < \infty$ a.s., $t_1 < t_2$ なるものを連続増加過程といい、連続増加過程全体を $\mathcal{A}_{+,c}$ で表す。また、

$$\mathcal{A}_c := \{A^1 - A^2; A^1, A^2 \in \mathcal{A}_+\}$$

$$\mathcal{M}_c^p := \{M = (M_t); M \text{ は連続マルチンゲールで } E[|M_t|^p] < \infty, \forall t \geq 0\} \quad p \geq 1,$$

とおく。 $A \in \mathcal{A}_c$ であれば、a.a. $\omega \in \Omega$ で $A_t(\omega)$ が有界変動であることに注意する。

以下、連続な局所マルチンゲール (定義 2.7) M に対して、 $M^2 - \langle M \rangle$ が再び局所マルチンゲールになる連続増加過程 $\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ が一意的に存在することを示す。この $\langle M \rangle$ を M の 2 次変分 (quadratic variation) とよぶ。

補題 2.11 $M = (M_t)$ が、 $M \in \mathcal{M}_c^2 \cap \mathcal{A}_c$ であれば $M_t = M_0, \forall t$ a.s. である。

証明: $M_0 = 0$ としてよい。分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ をとり、 $\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} E[M_t^2] &= \sum_{i=1}^n E[M_{t_i}^2 - M_{t_{i-1}}^2] = \sum_{i=1}^n E[(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2] \\ &\leq E\left[\max_i |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \sum_{i=1}^n |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}|\right] \end{aligned}$$

である。 $M_t = A_t^1 - A_t^2 \in \mathcal{A}_c, A^1, A^2 \in \mathcal{A}_{+,c}$ とし、

$$\sigma_k := \inf\{t > 0; A_t^1 + A_t^2 > k\} \quad (\inf \emptyset = \infty \text{ とする})$$

⁹ここでは [N] 長井英生: 確率微分方程式 共立出版 にある証明を紹介する。一般の場合は [KS] p.21–30 を参照せよ。

と定める。このとき例 2.1 より σ_k は stopping time であるから定理 2.7 により $M_t^k := M_{t \wedge \tau_k}$ は連続マルチンゲールとなる。よって、 $\sum_{i=1}^n |M_{t_i}^k - M_{t_{i-1}}^k| \leq \sum_{i=1}^n (|A_{t_i \wedge \tau_k}^1 - A_{t_{i-1} \wedge \tau_k}^1| + |A_{t_i \wedge \tau_k}^2 - A_{t_{i-1} \wedge \tau_k}^2|) \leq k$ であることと、各 $\omega \in \Omega$ に対し $M_s^k(\omega)$ が $[0, t]$ 上で一様連続であることから

$$E[(M_t^k)^2] \leq kE[\max_i |M_{t_i}^k - M_{t_{i-1}}^k|] \rightarrow 0 \quad \text{as } \|\Delta\| \rightarrow 0.$$

これより $M_t^k = 0$ a.s. $\forall k$ となり、 $\tau_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) だから $M_t = 0$ a.s. を得る。 \square

分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots$ に対して、 $t_n < t \leq t_{n+1}$ のとき、

$$Q_t(M; \Delta) := \sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_t - M_{t_n})^2, \quad Q_0(M; \Delta) = 0$$

とおく。例えば Brown 運動の場合、命題 1.8 と同様に $Q_t(B; \Delta) \rightarrow t$ in L^2 がわかる。一方、問 2.2 (2) で見たように $B_t^2 - t$ はマルチンゲールになっている。次の定理はその一般化である。

定理 2.12 $M \in \mathcal{M}_c^4$ とする。このとき、 $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t) \in \mathcal{A}_{+,c}$ が存在して、 $\|\Delta\| \rightarrow 0$ のとき $Q_t(M; \Delta) \rightarrow \langle M \rangle_t$ in L^2 , $\forall t$ であり、かつ $M^2 - \langle M \rangle$ はマルチンゲールとなる。また、 $M^2 - A$ がマルチンゲールとなるような $A \in \mathcal{A}_{+,c}$ は唯一つである。

補題 2.13 $M \in \mathcal{M}_c^4$ のとき $C > 0$ が存在し分割 Δ によらず $E[Q_t(M; \Delta)^2] \leq C$ とできる。

証明: $|M_t| \leq K$, $\exists K > 0$ のときにまず示す。 $\Delta : 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_l < t < \dots$ とする。 $s_{l+1} = t$ としておく。

$$\begin{aligned} Q_t(M; \Delta)^2 &= \left\{ \sum_{k=0}^l (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^2 \right\}^2 \\ &= \sum_{k=0}^l (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^4 + 2 \sum_{j < k} (M_{s_{j+1}} - M_{s_j})^2 (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^2 \\ &= \sum_{k=0}^l (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^4 + 2 \sum_j (M_{s_{j+1}} - M_{s_j})^2 (Q_t(M; \Delta) - Q_{s_{j+1}}(M; \Delta)) \\ &= \sum_{k=0}^l (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^4 + 2 \sum_j (Q_{s_{j+1}}(M; \Delta) - Q_{s_j}(M; \Delta)) (Q_t(M; \Delta) - Q_{s_{j+1}}(M; \Delta)) \end{aligned}$$

であるが、 $E[Q_t(M; \Delta) - Q_{s_{j+1}}(M; \Delta) | \mathcal{F}_{s_{j+1}}] = E[(M_t - M_{s_{j+1}})^2 | \mathcal{F}_{s_{j+1}}]$ に注意すると

$$\begin{aligned} &E[Q_t(M; \Delta)^2] \\ &= E \left[\sum_{k=0}^l (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^4 \right] + 2 \sum_j E[(Q_{s_{j+1}}(M; \Delta) - Q_{s_j}(M; \Delta))(M_t - M_{s_{j+1}})^2] \\ &\leq E \left[\left(\max_{0 \leq j \leq l} |M_{s_{j+1}} - M_{s_j}|^2 + 2 \max_{0 \leq j \leq l} |M_t - M_{s_{j+1}}|^2 \right) Q_t(M; \Delta) \right] \\ &\leq 12K^2 E[Q_t(M; \Delta)] = 12K^2 E[M_t^2 - M_0^2] \leq 12K^4. \end{aligned}$$

ここで最後の等式はマルチンゲール性を用いた。一方、 $M_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|$ とおくと、 $\max_j |M_{s_{j+1}} - M_{s_j}|^2 \leq 4(M_t^*)^2$ だから、上式より

$$E[Q_t(M; \Delta)^2] \leq E[12(M_t^*)^2 Q_t(M; \Delta)] \leq E[12^2(M_t^*)^4]^{1/2} E[Q_t(M; \Delta)^2]^{1/2}.$$

よって、両辺を2乗し $E[Q_t(M; \Delta)^2]$ で割り、Doobの不等式 (iii) を用いると

$$E[Q_t(M; \Delta)^2] \leq 12^2 E[(M_t^*)^4] \leq 12^2 (4/3)^4 E[M_t^4] < \infty$$

を得る。一般の場合は $M_t^{(K)} := M_{\tau_K \wedge t}$, $\tau_K = \inf\{s; |M_s| > K\}$ とおいて、Fatouの補題を用いればよい。□

補題 2.14 $Y^{(n)} = (Y_s^{(n)})_{s \in [0, T]}$ を (\mathcal{F}_t) -adapted な連続確率過程で

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} E \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{(n)} - Y_s^{(m)}|^2 \right] = 0$$

なるものとする。このとき、 (\mathcal{F}_t) -adapted な連続確率過程 (Y_s) が存在し、 $\{Y^{(n)}\}_n$ の適当な部分列 $\{Y^{(n_k)}\}_k$ を取れば

$$P \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{(n_k)} - Y_s| = 0 \right) = 1 \quad \text{かつ} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{(n_k)} - Y_s|^2 \right] = 0$$

とできる。

証明: $n_k \leq n_{k+1}$ を $E \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{(n)} - Y_s^{(m)}|^2 \right] < 1/2^{3k}$, $n, m > n_k$ となるようにとる。このとき、

$$A_k := \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{(n_{k+1})} - Y_s^{(n_k)}| > \frac{1}{2^k} \right\}$$

とすると、Chebyshevの不等式により

$$P(A_k) \leq 2^{2k} E \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{(n_{k+1})} - Y_s^{(n_k)}|^2 \right] < \frac{1}{2^k}.$$

よって、 $\sum_k P(A_k) < \infty$ となり Borel-Cantelliの補題より $\Omega_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k^c$ とおくと $P(\Omega_0) = 1$ 。ここで $\omega \in \Omega_0$ ならばある $m = m(\omega)$ が存在して $\forall k \geq m$ に対し $\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{(n_{k+1})} - Y_s^{(n_k)}| \leq \frac{1}{2^k}$ だから $n_j \geq n_i \geq m$ に対して

$$\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{(n_i)} - Y_s^{(n_j)}| \leq \sum_{l=i}^{j-1} \frac{1}{2^l} \leq \frac{1}{2^{i-1}}.$$

よって、 $Y^{(n_k)}$ は $C([0, T])$ の Cauchy 列となり、ある連続確率過程 $Y = (Y_s)$ があって $\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{(n_k)} - Y_s| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ 。また、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{(n_k)} - Y_s|^2 \right] &= \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{(n_k)} - Y_s^{(n_j)}|^2 \right] \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} E \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{(n_k)} - Y_s^{(n_j)}|^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

を得る。最後の不等号は Fatouの補題を用いた。□

定理 2.12 の証明: (一意性) $M_t^2 - A_t, M_t^2 - \tilde{A}_t$ がともにマルチンゲールで $A, \tilde{A} \in \mathcal{A}_{+,c}$ とすると、 $A_t - \tilde{A}_t = (M_t^2 - \tilde{A}_t) - (M_t^2 - A_t) \in \mathcal{M}_c^2 \cap \mathcal{A}_c$ となるので補題 2.11 により $A_t - \tilde{A}_t = A_0 - \tilde{A}_0 = 0, \forall t$ a.s. を得る。

(存在) まず、分割 Δ で $\|\Delta\| \rightarrow 0$ なるものをとるとき、 $Q_t(M; \Delta)$ が L^2 -ノルムで Cauchy 列をなすことを示す。 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots, t_n < t \leq t_{n+1}$ とし、 $t_k < s \leq t_{k+1}$ とすると、マルチンゲール性より $E[(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 | \mathcal{F}_s] = E[(M_{t_{k+1}} - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] + (M_s - M_{t_k})^2$ となるから

$$\begin{aligned} E[Q_t(M; \Delta) | \mathcal{F}_s] &= \sum_{i=0}^k (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_s - M_{t_k})^2 \\ &\quad + E[(M_{t_{k+1}} - M_{t_s})^2 + \sum_{i=k+1}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_t - M_{t_n})^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{i=0}^k (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + (M_s - M_{t_k})^2 + E[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

従って

$$E[Q_t(M; \Delta) - Q_s(M; \Delta) | \mathcal{F}_s] = E[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s] \quad (2.8)$$

となり、 $M_t^2 - Q_t(M; \Delta)$ がマルチゲールになることがわかる。 Δ' を別な分割とすると $M_t^2 - Q_t(M; \Delta')$ もマルチゲールだから $L_t := Q_t(M; \Delta) - Q_t(M; \Delta')$ もマルチンゲールで 2 乗可積分である。 よって、(2.8) で M を L, Δ を $\Delta \cup \Delta', s = 0$ ととることで

$$E[Q_t(Q(M; \Delta) - Q(M; \Delta'); \Delta \cup \Delta')] = E[L_t^2 - L_0^2] \quad (2.9)$$

を得る。 また

$$Q_t(Q(M; \Delta) - Q(M; \Delta'); \Delta \cup \Delta') \leq 2Q_t(Q(M; \Delta); \Delta \cup \Delta') + 2Q_t(Q(M; \Delta'); \Delta \cup \Delta')$$

に注意する。 ここで、 $\Delta \cup \Delta' : s_0 < s_1 < \dots < s_l < s_{l+1}, s_l \leq t < s_{l+1}$ とし、 $t_{j(k)} \leq s_k < s_{k+1} \leq t_{j(k)+1}$ とすると

$$\begin{aligned} Q_{s_{k+1}}(M; \Delta) - Q_{s_k}(M; \Delta) &= (M_{s_{k+1}} - M_{t_{j(k)}})^2 - (M_{s_k} - M_{t_{j(k)}})^2 \\ &= (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})(M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_{j(k)}}) \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} Q_t(Q(M; \Delta); \Delta \cup \Delta') &= \sum_k (Q_{s_{k+1}}(M; \Delta) - Q_{s_k}(M; \Delta))^2 + (Q_t(M; \Delta) - Q_{s_l}(M; \Delta))^2 \\ &= \sum_k (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^2 (M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_{j(k)}})^2 + (M_t - M_{s_l})^2 (M_t + M_{s_l} - 2M_{t_n})^2. \end{aligned}$$

従って

$$Q_t(Q(M; \Delta); \Delta \cup \Delta') \leq \sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_{j(k)}}|^2 Q_t(M; \Delta \cup \Delta')$$

となり、(2.9) およびその次の式と合わせて

$$\begin{aligned}
& E[(Q_t(M; \Delta) - Q_t(M; \Delta'))^2] \\
& \leq 2E[Q_t(Q(M; \Delta); \Delta \cup \Delta')] + 2E[Q_t(Q(M; \Delta'); \Delta \cup \Delta')] \\
& \leq 2E[\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_{j(k)}}|^4]^{\frac{1}{2}} E[Q_t(M; \Delta \cup \Delta')^2]^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + 2E[\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t'_{j(k)}}|^4]^{\frac{1}{2}} E[Q_t(M; \Delta \cup \Delta')^2]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\{t'_j\}$ は Δ' の分割点を表す。今、 $\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_{j(k)}}|^4 \leq 4^4 (M_t^*)^4$ で Doob の不等式 (iii) より $M_t^* := \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|$ は 4 乗可積分であるから、Lebesgue の優収束定理により

$$\lim_{\|\Delta\|, \|\Delta'\| \rightarrow 0} E[\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t'_{j(k)}}|^4] = 0$$

であり、補題 2.13 と合わせて

$$\lim_{\|\Delta\|, \|\Delta'\| \rightarrow 0} E[(Q_t(M; \Delta) - Q_t(M; \Delta'))^2] = 0$$

となる、Cauchy 列となることがわかった。

各 $t > 0$ に対して、分割の列 Δ_n を $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ となるようにとる。 $(Q_s(M; \Delta_n) - Q_s(M; \Delta_m))_{s \in [0, t]}$ はマルチンゲールなので $n, m \rightarrow \infty$ のとき

$$E[\sup_{0 \leq s \leq t} |Q_s(M; \Delta_n) - Q_s(M; \Delta_m)|^2] \leq 4E[|Q_s(M; \Delta_n) - Q_s(M; \Delta_m)|^2] \rightarrow 0$$

であり、 $Q_s(M; \Delta_n)$ は連続なので、必要なら部分列 $\{\Delta_{n_k}\}$ をとることで補題 2.14 により (\mathcal{F}_t) -adapted な連続確率過程 $\langle M \rangle$ が存在して

$$P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |Q_s(M; \Delta_{n_k}) - \langle M \rangle_s| = 0\right) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E\left[\sup_{0 \leq s \leq T} |Q_s(M; \Delta_{n_k}) - \langle M \rangle_s|^2\right] = 0$$

とできる。ここで、第 2 式については部分列を取る必要のないことは明らかであろう。これより、極限 $(\langle M \rangle_s)_{0 \leq s \leq T}$ の一意性もわかる。特に、この極限は区間 $[0, T]$ の取り方によらず定まる。また、 $s \mapsto Q_s(M; \Delta_n)$ は増加過程なので $s \mapsto \langle M \rangle_s$ も増加過程であることがわかり、 $\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ を得る。一方、 $M_s^2 - Q_s(M; \Delta_n)$ はマルチンゲールであるので $M_s^2 - \langle M \rangle_s$ もマルチンゲールであることがわかる。□

問 2.5 M をマルチンゲールとする。 σ を *stopping time* とし、 $M_t^\sigma = M_{\sigma \wedge t}$ とするとき、 M^σ はマルチンゲールであり、さらに $M \in \mathcal{M}_c^4$ とするとき、 $\langle M^\sigma \rangle_t = \langle M \rangle_{\sigma \wedge t}$ を示せ。

定義 2.7 (\mathcal{F}_t) -adapted 右連続確率過程 $X = (X_t)$ に対して $\tau_n \leq \tau_{n+1}$, $\forall n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$ なる ($0 \leq t \leq T$ で考えるときは $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = T$ なる) ある *stopping times* の列 $\{\tau_n\}$ があって、各 n に対して $(X_t^{\tau_n})$ がマルチンゲールになるとき $X = (X_t)$ は局所マルチンゲールであるという。局所マルチンゲール全体の空間を \mathcal{M}_{loc} , 連続な局所マルチンゲール全体の空間を $\mathcal{M}_{c, \text{loc}}$ と表す。

系 2.15 $M \in \mathcal{M}_{c, \text{loc}}$ とするとき、

- (1) $\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ が存在して $M^2 - \langle M \rangle$ は連続な局所マルチンゲールとなる。また、このような $\langle M \rangle$ は一意である。

(2) 各 $t > 0$ に対して $[0, t]$ の分割の列 $\{\Delta_n\}$ をとるとき

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Q_s(M; \Delta_n) - \langle M \rangle_s| > \varepsilon\right) = 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.10)$$

(3) $M_0 = 0$ のとき $M \in \mathcal{M}_c^2$ なることは $E[\langle M \rangle_t] < \infty, \forall t$ と同値であり、さらに $E[M_t^2] = E[\langle M \rangle_t]$ である。

証明: (1) 仮定よりある stopping time の列 $\{\tau_n\}$ があって M^{τ_n} はマルチンゲールとなる。 $\sigma_n := \inf\{t; |M_t| \geq n\}$ とおくと $\sigma_n \uparrow \infty$ であり、 $M^n := M^{\rho_n}$ は有界なマルチンゲールである。ただし、 $\rho = \sigma_n \wedge \tau_n$ とする。このとき定理 2.12 より $\exists A^n \in \mathcal{A}_{+,c}$ で $(M^n)^2 - A^n$ はマルチンゲールとなるが $((M^{n+1})^2 - A^{n+1})^{\rho_n} = (M^n)^2 - (A^{n+1})^{\rho_n}$ はマルチンゲールであるから一意性により $(A^{n+1})^{\rho_n} = A^n$ 。従って $\langle M \rangle_t := \lim_{n \rightarrow \infty} A_t^n, \forall t > 0$ が定義でき:

$$(M_t^{\rho_n})^2 - \langle M \rangle_t^{\rho_n} = M_{\rho_n \wedge t}^2 - \langle M \rangle_{\rho_n \wedge t} = (M_t^{\rho_n})^2 - A_t^n$$

はマルチンゲールであるから (1) は示された。

(2) $\rho_n \uparrow \infty$ なので各 $\delta > 0$ に対して $P(\rho_m \leq t) < \delta$ となる m があり、 M^{ρ_m} は有界マルチンゲールとなる。 $Q_s(M; \Delta) = Q_s(M^{\rho_m}; \Delta), s \leq \rho_m$ だから

$$\langle M \rangle_s = \langle M^{\rho_m} \rangle_s, \quad s \leq \rho_m.$$

よって

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Q_s(M; \Delta) - \langle M \rangle_s| > \varepsilon\right) \leq P(\rho_m \leq t) + P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Q_s(M^{\rho_m}; \Delta) - \langle M^{\rho_m} \rangle_s| > \varepsilon\right)$$

より

$$\limsup_{\|\Delta\| \rightarrow 0} P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Q_s(M; \Delta) - \langle M \rangle_s| > \varepsilon\right) \leq \delta$$

となり $\delta \downarrow 0$ とすることで (2) が示される。

(3) $M \in \mathcal{M}_c^2, M_0 = 0$ とする。 $E[(M_t^{\rho_n})^2 - \langle M^{\rho_n} \rangle_t] = 0$ だから

$$E[\langle M \rangle_t] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\langle M^{\rho_n} \rangle_t] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[(M_t^{\rho_n})^2] \leq E[M_t^2].$$

ここで最後の不等号は (M_t^2) の劣マルチンゲールによる。逆に Fatou の補題により

$$E[M_t^2] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[(M_t^{\rho_n})^2] = \liminf_{n \rightarrow \infty} E[\langle M^{\rho_n} \rangle_t] = E[\langle M \rangle_t]$$

となり結論を得る。 \square

注意 2.2 この系により、 $M \in \mathcal{M}_c^2$ に対して $\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ で $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ がマルチンゲールとなるものが一意的存在することがわかる。

系 2.16 $M, N \in \mathcal{M}_{c,loc}$ とする。このとき $\langle M, N \rangle \in \mathcal{A}_c$ が一意的存在して

(1) $MN - \langle M, N \rangle$ は連続な局所マルチンゲール

(2) 各 $t > 0$ に対して $[0, t]$ の分割の列 $\{\Delta_n\}$ をとるとき

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Q_s(M, N; \Delta_n) - \langle M, N \rangle_s| > \varepsilon\right) = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

である。ただし、 $Q_s(M, N; \Delta_n) = \sum_{i: t_{i+1} < s} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) + (M_s - M_{t_n})(N_s - N_{t_n})$, $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots, t_n \leq s < t_{n+1}$ とする。

証明: $\langle M, N \rangle = \frac{1}{4}(\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle)$ ととればよい。 \square

命題 2.17 $M, N, L \in \mathcal{M}_{c, \text{loc}}$ とする。

(i) $\langle M, N \rangle = \langle N, M \rangle$.

(ii) $\langle M + N, L \rangle = \langle M, L \rangle + \langle N, L \rangle$.

(iii) 任意の定数 a に対して $\langle aM, N \rangle = a \langle M, N \rangle$.

(iv) τ を *stopping time* とするとき、 $\langle M^\tau, N^\tau \rangle_t = \langle M^\tau, N \rangle_t = \langle M, N \rangle_{\tau \wedge t}$.

証明: 系 2.15, 2.16 から明らか。 \square

以下では、しばらく $\forall T > 0$ を固定して

$$\mathcal{M}_T := \{M = (M_t)_{t \in [0, T]}; M \text{ は連続な } (\mathcal{F}_t)\text{-マルチンゲールで } E[M_T^2] < \infty\}$$

とする。次の命題は確率積分を定義する際の基礎となる。

命題 2.18 \mathcal{M}_T は $E[\langle \cdot, \cdot \rangle_T]$ を内積として実 Hilbert 空間をなす。

証明: $(\cdot, \cdot) := E[\langle \cdot, \cdot \rangle_T]$ が内積の性質を満たすこと¹⁰は系 2.15 とその注意 2.2, 系 2.16, 命題 2.17 からわかる (演習問題とする)。完備であることは $\{M^n\}_n \subset \mathcal{M}_T$ が $E[\langle M^n - M^m \rangle_T] \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) とおくと、Doob の不等式 (iii) と注意 2.2 より

$$E\left[\sup_{0 \leq s \leq T} |M_s^n - M_s^m|^2\right] \leq 4E[|M_T^n - M_T^m|^2] = 4E[\langle M^n - M^m \rangle_T]$$

とできるから、補題 2.14 から (\mathcal{F}_t) -adapted な連続確率過程 M が存在して $E[\sup_{0 \leq s \leq T} |M_s^n - M_s|^2] \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ となる (部分列をとる必要のないことに注意)。このとき、 M がマルチンゲールであることは各 M^n のマルチンゲール性と命題 2.1 (6) から従う。よって、

$$E[\langle M^n - M \rangle_T] = E[|M_T^n - M_T|^2]$$

であるから内積 $E[\langle \cdot, \cdot \rangle_T]$ から入るノルムが完備となり、 \mathcal{M}_T が Hilbert 空間であることがわかる。 \square

¹⁰ $M, N, L \in \mathcal{M}_T, \alpha \in \mathbb{R}$ に対して、正値性: $(M, M) \geq 0, (M, M) = 0 \iff M = 0$ a.s. と線形性: $(M + N, L) = (M, L) + (N, L), (\alpha M, N) = \alpha(M, N)$, 対称性: $(M, N) = (N, M)$ を示せばよい。(cf. 前期の定義 4.1)

3 確率積分

Brown 運動は命題 1.8 で見たように有界変動ではないから、積分 $\int_0^t f_s dB_s$ を通常の Stieltjes 積分として定義することはできない。ここでは、一般の連続な (\mathcal{F}_s) -マルチンゲール (M_s) に対して、 f_s は時刻 s までの情報のみに依存している、即ち、 (\mathcal{F}_t) -発展的可測 (cf. 定義 1.2) であるとして、積分 $\int_0^t f_s dM_s$ が確率的に定義できることを示す。その際、前章のマルチンゲールに関する事柄が重要な役割を果たす。この章を通して、確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) と仮定 F を満たす filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ が与えられているとする。

3.1 確率積分の定義

§2.5 で導入した記号を復習すると同時に以下の記号を導入する: $p \geq 1, T > 0$ に対し

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{c,T}^p &:= \{ M = (M_t)_{t \in [0,T]} \text{ は連続マルチンゲールで } E[|M_T|^p] < \infty \}, \\ \mathcal{M}_c^p &:= \{ M = (M_t)_{t \geq 0}; M \text{ は連続マルチンゲールで } E[|M_t|^p] < \infty, \forall t \geq 0 \} \end{aligned}$$

$p = 2$ のとき、単に $\mathcal{M}_T = \mathcal{M}_{c,T}^2, \mathcal{M} = \mathcal{M}_c^2$ と書く。filtration (\mathcal{F}_t) を強調したいときは $\mathcal{M}_T(\mathcal{F}_t), \mathcal{M}(\mathcal{F}_t)$ と書くこととする。

次の命題はすでに命題 2.18 として紹介したが、確率積分の定義する基礎の空間であるので (2) にを付け加え再度紹介する。

命題 3.1 (1) \mathcal{M}_T は $\|M\|_T := E[M_T^2]^{1/2}$ をノルムとして Hilbert 空間をなす。
(2) \mathcal{M} は $d(M, N) := \sum_{k=0}^{\infty} (\|M - N\|_k \wedge 1) / 2^k$ を距離とする完備距離空間である。

証明: (1) は $\|M\|_T = E[\langle M \rangle_T]^{1/2}$ であるから命題 2.18 で証明済みである。(2) のために $\{M^n\} \subset \mathcal{M}$ を $d(M^n, M^m) \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) とする。各 $T \in \mathbb{N}$ に対して $\{(M_t^n)_{t \in [0,T]}\}$ は \mathcal{M}_T の Cauchy 列であるから、(1) より極限 $M^{(T)} \in \mathcal{M}_T$ を持つ。今、極限の一意性より $l \geq T$ ならば $M_t^{(l)} = M_t^{(T)}$ ($0 \leq t \leq T$) a.s. となる。よって、 $M_t = M_t^{[t]+1}$ と定めれば、 $M \in \mathcal{M}$ であり、 $d(M^n, M) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を得る。□

系 2.15 によれば、 $M \in \mathcal{M}$ に対して、ある $\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{+,c}$ が存在して、 $M^2 - \langle M \rangle$ はマルチンゲールとできる。そこで、 $M \in \mathcal{M}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T^2(\langle M \rangle) &:= \{ f; f = f_t(\omega) \text{ は発展的可測で } E[\int_0^T f_s^2 d\langle M \rangle_s] < \infty \} \\ \mathcal{L}^2(\langle M \rangle) &:= \{ f; f = f_t(\omega) \text{ は発展的可測で } E[\int_0^T f_s^2 d\langle M \rangle_s] < \infty, \forall T > 0 \} \end{aligned}$$

とおく。また、特に $M \in \mathcal{M}$ が与えられたとき、単に $\|f\|_{L_T} := \left(E[\int_0^T f_s^2 d\langle M \rangle_s] \right)^{1/2}$, $\mathcal{L}_T^2 = \mathcal{L}_T^2(\langle M \rangle), \mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(\langle M \rangle)$ と書くこともある。

命題 3.2 $M \in \mathcal{M}$ が与えられたとする。

(1) $\mathcal{L}_T^2(\langle M \rangle)$ は $\|\cdot\|_{L_T}$ をノルムとして Hilbert 空間をなす。
(2) $\mathcal{L}^2(\langle M \rangle)$ は $\rho(f^1, f^2) := \sum_{k=1}^{\infty} (\|f^1 - f^2\|_{L_k^2} \wedge 1) / 2^k$ を距離とする完備距離空間である。

証明: (1) $m(A) = E[\int_0^T 1_A(s, \omega) d\langle M \rangle_s]$, $A \in \mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}_T$ (直積 σ -加法族) とおく。 $L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}_T, dm)$ は前期の定理 3.2 から完備となる。したがって、 $\mathcal{L}_T^2(\langle M \rangle)$ はその閉部分空間 (極限も発展的可測であることを示せばよい) であるから、完備性は従う。(2) は命題 3.1 の (2) と同様に示せるので演習問題とする。 \square

$f_t(\omega) = \sum_{j=1}^k \xi_{j-1}(\omega) 1_{(t_{j-1}, t_j]}(t)$; $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$, $k \in \mathbb{N}$ で各 ξ_j は有界な \mathcal{F}_{t_j} -可測関数、と表わされる f を階段過程といい、階段過程全体を \mathcal{L}_0 と書くこととする。

補題 3.3 \mathcal{L}_0 は $\mathcal{L}^2(\langle M \rangle)$ で稠密である。

証明: $f \in \mathcal{L}^2(\langle M \rangle)$ をとる。Lebesgue の優収束定理より f は有界として一般性を失わない。

$$\tilde{f}_s(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_s^n(\omega), \quad f_s^n(\omega) := \frac{\int_{(s-\frac{1}{n}) \vee 0}^s f_u(\omega) d\langle M \rangle_u}{\langle M \rangle_s - \langle M \rangle_{(s-\frac{1}{n}) \vee 0}}$$

とする。 f_s は発展的可測であるから f_s^n は \mathcal{F}_{s-} -可測であることに注意する。このとき、分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ に対して

$$f_s^{n, \Delta}(\omega) = \sum_{j=1}^k f_{t_{j-1}}^n(\omega) 1_{(t_{j-1}, t_j]}(s)$$

とおけば、 $f_s^{n, \Delta} \in \mathcal{L}_0$ であり、 f^n は連続であるから $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} f_s^{n, \Delta}(\omega) = f_s^n(\omega)$, $\forall (s, \omega)$ 。従って、

$$E[\int_0^T |f_s^{n, \Delta} - f_s^n|^2 d\langle M \rangle_s] \rightarrow 0, \quad \|\Delta\| \rightarrow 0.$$

一方、 $d\langle M \rangle$ a.s. s に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_s^n(\omega)$ が存在して $\tilde{f}_s(\omega)$ に等しく、

$$\int_0^T \tilde{f}_s(\omega) d\langle M \rangle_s = \int_0^T f_s(\omega) d\langle M \rangle_s$$

である (cf. 前期の定理 2.4)。従って、 $E[\int_0^T |f_s^n - \tilde{f}_s|^2 d\langle M \rangle_s] \rightarrow 0$ と合わせて、 $f_s^{n, \Delta}$ が f を近似していることがわかった。 \square

定義 3.1 $f_s(\omega) = \sum_{j=1}^k \xi_{j-1}(\omega) 1_{(t_{j-1}, t_j]}(s) \in \mathcal{L}_0$ に対して

$$I(f)_t := \sum_{j: t_j < t} \xi_{j-1}(M_{t_j} - M_{t_{j-1}}) + \xi_l(M_t - M_{t_l}), \quad t_l < t \leq t_{l+1} \quad (3.1)$$

と定義する。また、これを

$$I(f)_t = \int_0^t f_s dM_s$$

と表す。(3.1) で分点の取り方によらないことに注意する。また、 ξ_j は \mathcal{F}_{t_j} -可測であった。

補題 3.4 $I(f) \in \mathcal{M}$ であり、(1) $\langle I(f) \rangle_t = \int_0^t f_s^2 d\langle M \rangle_s$. (2) $E[I(f)_t^2] = E[\int_0^t f_s^2 d\langle M \rangle_s]$.

証明: $I(f)$ のマルチンゲール性: $f_t = \xi_1(\omega) 1_{(t_1, t_2]}(t)$, ξ_1 は \mathcal{F}_{t_1} -可測, のときに証明すれば十分であろう。このとき、

$$s \geq t_1 \text{ であれば } E[I(f)_t | \mathcal{F}_s] = \xi_1(E[M_{t \wedge t_2} | \mathcal{F}_s] - M_{t_1}) = \xi_1(M_s - M_{t_1}) = I(f)_s.$$

$$s < t_1 \text{ であれば } E[I(f)_t | \mathcal{F}_s] = E[\xi_1(E[M_{t \wedge t_2} | \mathcal{F}_{t_1}] - M_{t_1}) | \mathcal{F}_s] = 0, \quad I(f)_s = 0.$$

より従う。連続性と2乗可積分性は (ξ_j は有界だから) は明らかである。

(1): $s \leq t_j < t_k$ のとき

$$E[\xi_j(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})\xi_k(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})|\mathcal{F}_s] = E[\xi_j(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})\xi_k E[M_{t_{k+1}} - M_{t_k}|\mathcal{F}_{t_k}]|\mathcal{F}_s] = 0$$

であることに注意する。これより、 $t_m \leq s < t_{m+1} \leq t_l \leq t < t_{l+1}$ とすると、

$$\begin{aligned} & E[(I(f)_t - I(f)_s)^2|\mathcal{F}_s] \\ &= E\left[\left\{\sum_{j=m+2}^l \xi_{j-1}(M_{t_j} - M_{t_{j-1}}) + \xi_l(M_t - M_{t_l}) + \xi_m(M_{t_{m+1}} - M_s)\right\}^2|\mathcal{F}_s\right] \\ &= E[\xi_m^2(M_{t_{m+1}} - M_s)^2|\mathcal{F}_s] + \sum_{j=m+2}^l E[\xi_{j-1}^2(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2|\mathcal{F}_s] + E[\xi_l^2(M_t - M_{t_l})^2|\mathcal{F}_s] \\ &= E[\xi_m^2(M_{t_{m+1}}^2 - M_s^2)|\mathcal{F}_s] + \sum_{j=m+2}^l E[\xi_{j-1}^2(M_{t_j}^2 - M_{t_{j-1}}^2)|\mathcal{F}_s] + E[\xi_l^2(M_t^2 - M_{t_l}^2)|\mathcal{F}_s] \\ &= E[\xi_m^2(\langle M \rangle_{t_{m+1}} - \langle M \rangle_s)|\mathcal{F}_s] + \sum_{j=m+2}^l E[\xi_{j-1}^2(\langle M \rangle_{t_j} - \langle M \rangle_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_s] + E[\xi_l^2(\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_{t_l})|\mathcal{F}_s] \\ &= E\left[\int_s^t f_u^2 \langle M \rangle_u\right]. \end{aligned}$$

一方、 $I(f)$ のマルチンゲール性より $E[\{I(f)_t - I(f)_s\}^2|\mathcal{F}_s] = E[I(f)_t^2 - I(f)_s^2|\mathcal{F}_s]$ である。よって、 $I(f)_t^2 - \int_0^t f_u^2 \langle M \rangle_u$ はマルチンゲールとなり、(1) の主張は示された。(2) は(1) で $s = 0$ ととればよい。 \square

定義 3.2 $f \in \mathcal{L}^2(\langle M \rangle)$ に対して確率積分を定義する。 $f^n \in \mathcal{L}_0$ を

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\int_0^T |f_s^n - f_s|^2 d\langle M \rangle_s\right] = 0, \quad \forall T > 0$$

となるようにとると、補題 3.4 (2) により $\{I(f^n)\}_n$ は \mathcal{M} の Cauchy 列となる。よって、命題 3.1 により $X \in \mathcal{M}$ が存在して $d(I(f^n), X) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) とできる。この X を $X_t = I(f)_t = \int_0^t f_s dM_s$ と書き、 f の M による確率積分 (stochastic integral) と呼ぶ。

問 3.1 定義 3.2 で、 $I(f)$ が f への収束列 $\{f^n\}$ の取り方によらないことを示せ。

問 3.2 $f \in \mathcal{L}^2(\langle M \rangle)$ とするとき、 $E[I(f)_T^2] = E[\langle I(f) \rangle_T] = E\left[\int_0^T f_s^2 d\langle M \rangle_s\right]$ を示せ。

ヒント: \mathcal{L}_0 の元で近似せよ。

補題 3.5 $M, N \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{L}^2(\langle M \rangle)$, $g \in \mathcal{L}^2(\langle N \rangle)$, $t > 0$ とすると、

$$\left|\int_0^t f_s g_s d\langle M, N \rangle_s\right| \leq \left(\int_0^t f_s^2 d\langle M \rangle_s\right)^{1/2} \left(\int_0^t g_s^2 d\langle N \rangle_s\right)^{1/2}, \quad a.s. \quad (3.2)$$

証明: 命題 2.17 により、 $\langle M + rN \rangle = \langle M \rangle + 2r\langle M, N \rangle + r^2\langle N \rangle$, $\forall r \in \mathbb{Q}$ であるから、

$$0 \leq \int_{s_1}^{s_2} d\langle M + rN \rangle_s = \int_{s_1}^{s_2} d\langle M \rangle_s + 2r \int_{s_1}^{s_2} d\langle M, N \rangle_s + r^2 \int_{s_1}^{s_2} d\langle N \rangle_s, \quad a.s.$$

であるが、右辺は r について連続だから、 $\forall r \in \mathbb{R}$ に対して成立するので、

$$\left| \int_{s_1}^{s_2} d\langle M, N \rangle_s \right| \leq \left(\int_{s_1}^{s_2} d\langle M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_{s_1}^{s_2} d\langle N \rangle_s \right)^{1/2}.$$

よって、 $f = \sum_i \xi_{i-1} 1_{(t_{i-1}, t_i]}$, $g = \sum_i \eta_{i-1} 1_{(t_{i-1}, t_i]}$ $\in \mathcal{L}_0$ に対して

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t f_s g_s d\langle M, N \rangle_s \right| &= \left| \sum_i \xi_{i-1} \eta_{i-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\langle M, N \rangle_s \right| \\ &\leq \sum_i |\xi_{i-1}| |\eta_{i-1}| \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} d\langle M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} d\langle N \rangle_s \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_i |\xi_{i-1}|^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\langle M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\sum_i |\eta_{i-1}|^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\langle N \rangle_s \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^t f_s^2 d\langle M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^t g_s^2 d\langle M \rangle_s \right)^{1/2} \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

よって、有界な f, g に対しては補題 3.3 により \mathcal{L}_0 の元で近似し、一般の f, g に対しては Lebesgue の優収束定理を用いて有界なもので近似すればよい。 \square

定理 3.6 (1) $M, N \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{L}^2(\langle M \rangle)$ のとき、 $I(f)_t = \int_0^t f_s dM_s$ とすると、

$$\langle I(f), N \rangle_t = \int_0^t f_s d\langle M, N \rangle_s, \quad t > 0 \quad (3.3)$$

である。逆に $\forall N \in \mathcal{M}$ に対して $\langle X, N \rangle_t = \int_0^t f_s d\langle M, N \rangle_s$ ($t > 0$) および $X_0 = 0$ を満たす \mathcal{M} の元 X は $I(f)_t = \int_0^t f_s dM_s$ に限る。

(2) $I(f)_T = \int_0^T f_s dM_s$ によって定まる、 $I : \mathcal{L}_T^2(\langle M \rangle) \rightarrow \mathcal{M}_T$ は各 $T > 0$ に対し等距離写像である。

証明: (1) $f \in \mathcal{L}^2(\langle M \rangle)$ に対し、 $\{f^n\}_n \in \mathcal{L}_0$ を $\|f - f^n\|_{L_T} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), $\forall T > 0$ とすると、定義 3.2 より

$$E[\langle I(f^n) - I(f) \rangle_T] = E\left[\int_0^T |f_s^n - f_s|^2 d\langle M \rangle_s \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

補題 3.5 より

$$\begin{aligned} E[|\langle I(f^n), N \rangle_T - \langle I(f), N \rangle_T|] &= E[|\langle I(f^n) - I(f), N \rangle_T|] \\ &\leq E[\langle I(f^n) - I(f) \rangle_T^{1/2} \langle N \rangle_T^{1/2}] \leq E[\langle I(f^n) - I(f) \rangle_T]^{1/2} E[\langle N \rangle_T]^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

同じく補題 3.5 より、 $\left| \int_0^T (f_s - f_s^n) d\langle M, N \rangle_s \right| \leq \left(\int_0^T |f_s - f_s^n|^2 d\langle M \rangle_s \right)^{1/2} \langle N \rangle_T^{1/2}$ であるから、

$$E\left[\left| \int_0^T f_s d\langle M, N \rangle_s - \int_0^T f_s^n d\langle M, N \rangle_s \right| \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

一方、補題 3.4(1) と同様に $\langle I(f^n), N \rangle_t = \int_0^t f_s^n d\langle M, N \rangle_s$ を示せるから、(3.3) が従う。

一意性を示すために、 $\tilde{X} \in \mathcal{M}$ も $\langle \tilde{X}, N \rangle_t = \int_0^t f_s d\langle M, N \rangle_s$ を満たすとする。このとき、 $\forall N \in \mathcal{M}$ に対して $\langle \tilde{X} - X, N \rangle = 0$ であるが、特に $N = \tilde{X} - X$ とすると、 $\langle \tilde{X} - X \rangle = 0$ 。これは、 $\tilde{X} = X$ a.s. を意味する。(2) は問 3.2 そのものである。 \square

系 3.7 (1) $M \in \mathcal{M}$, $f, g \in \mathcal{L}^2(\langle M \rangle)$, $a, b \in \mathbb{R}$ のとき

$$\int_0^t (af_s + bg_s) dM_s = a \int_0^t f_s dM_s + b \int_0^t g_s dM_s, \quad \forall t > 0.$$

(2) $M, N \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{L}^2(\langle M \rangle) \cap \mathcal{L}^2(\langle N \rangle)$, $a, b \in \mathbb{R}$ のとき

$$\int_0^t f_s d(aM + bN)_s = a \int_0^t f_s dM_s + b \int_0^t f_s dN_s, \quad \forall t > 0.$$

証明: (1) $N \in \mathcal{M}$ のとき、定理 3.6 と命題 2.17 より

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^\cdot (af_s + bg_s) dM, N \right\rangle_t &= \int_0^t (af_s + bg_s) d\langle M, N \rangle_s = a \int_0^t f_s d\langle M, N \rangle_s + b \int_0^t g_s d\langle M, N \rangle_s \\ &= \left\langle a \int_0^\cdot f_s dM_s, N \right\rangle_t + \left\langle b \int_0^\cdot g_s dM_s, N \right\rangle_t = \left\langle a \int_0^\cdot f_s dM_s + b \int_0^\cdot g_s dM_s, N \right\rangle_t. \end{aligned}$$

となり、定理 3.6 の一意性を用いることで主張を得る。

(2) 補題 3.5 より $\mathcal{L}^2(\langle M \rangle) \cap \mathcal{L}^2(\langle N \rangle) \subset \mathcal{L}^2(\langle aM + bN \rangle)$ であるから主張の左辺の積分は定義されることに注意する。定理 3.6 と命題 2.17 より、 $\forall L \in \mathcal{M}$ に対して

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^\cdot f_s d(aM + bN)_s, L \right\rangle_t &= \int_0^t f_s d\langle aM + bN, L \rangle_s \\ &= a \int_0^t f_s d\langle M, L \rangle_s + b \int_0^t f_s d\langle N, L \rangle_s = \left\langle a \int_0^\cdot f_s dM_s + b \int_0^\cdot f_s dN_s, L \right\rangle_t. \quad \square \end{aligned}$$

定義 3.3 (局所マルチンゲールに対する確率積分) 局所マルチンゲール $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ をとる (cf. 定義 2.7)。この M に対して

$$P\left(\int_0^T f_s^2 d\langle M \rangle_s < \infty\right) = 1, \quad \forall T > 0 \quad (3.4)$$

となる発展的可測な $f = (f_s)$ に対して確率積分 $\int_0^t f_s dM_s$ を定義する。

定義 2.7 より *stopping time* の列 $\{\sigma_n\}$ が存在して $\sigma_n \uparrow \infty$ かつ $M_{t \wedge \sigma_n}$ がマルチンゲールとできる。

$$\tau_n = n \wedge \inf\{t \geq 0; \int_0^t f_s d\langle M \rangle_s \geq n\}$$

とおくとき、 $\tau_n \uparrow \infty$ であり、 $\rho_n = \sigma_n \wedge \tau_n$ とし、 $M_t^n = M_{t \wedge \rho_n}$, $f_t^n(\omega) = f_t(\omega)1_{\{\rho_n \geq t\}}(\omega)$

とおけば、 $M^n \in \mathcal{M}$, $f^n \in \mathcal{L}^2(\langle M^n \rangle)$ であるので、 $I(f^n)_t = \int_0^t f_s^n dM_s^n$ は定義できる。また、定理 3.6 と命題 2.17 (iv) により

$$I(f^n)_t = I(f^m)_t, \quad 0 \leq t \leq \rho_n, \quad n \leq m$$

となる。また、 $\rho_n \uparrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) であるから、整合的に $I(f)_t = I(f^n)_t$, $0 \leq t \leq \rho_n$ と定義できる。この $I(f)$ を f の M による確率積分と呼ぶ。

問 3.3 (定理 3.6 の拡張) $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ と (3.4) を満たす発展的可測な $f = (f_s)$ に対して、 $I(f)_t = \int_0^t f_s dM_s \in \mathcal{M}_{c,loc}$ は (3.3) を満たす唯一つの元であることを示せ。

問 3.4 $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$, (3.4) を満たす左連続で (\mathcal{F}_t) -適合な $f = (f_s)$ と分割 $\Delta : 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t$ に対して

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} P\left(\left|\int_0^t f_s dM_s - \sum_i f(s_i)(M_{i+1} - M_{s_i})\right| > \delta\right) = 0, \quad \delta > 0$$

が成立することを示せ。

3.2 伊藤の公式

ここでは確率積分によって定義されるような確率過程に対し、合成関数の微分公式 (連鎖律¹¹) に相当する公式である伊藤の公式を証明し確率演算 (stochastic calculus) の基礎付けを行う。

定義 3.4 確率過程 $X = (X_t)$ が

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \quad M \in \mathcal{M}_{c,loc}, \quad A \in \mathcal{A}_c$$

で X_0 は \mathcal{F}_0 -可測な確率変数、ただし $M_0 = 0$ a.s., $A_0 = 0$ a.s., と表されるとき、 $X = (X_t)$ は連続なセミマルチンゲール (semi-martingale)¹² という。また、 d 次元確率過程が連続なセミマルチンゲールであるとは、各成分が連続なセミマルチンゲールであるときにいう。

定理 3.8 $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ を連続なセミマルチンゲールであるとする:

$$X_t^i = X_0^i + M_t^i + A_t^i, \quad i = 1, \dots, d. \quad (3.5)$$

このとき、 $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ に対して $f(X_t)$ は連続なセミマルチンゲールで

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s) dM_s^i + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s) dA_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s. \end{aligned} \quad (3.6)$$

証明: 記号の単純化のために $f'_i := \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $f''_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ などと書く。

$$\tau_n := \inf\{t > 0; |X_0| \vee |M_t| \vee |A_t| > n\}$$

とする。ただし $\inf \emptyset = \infty$ と定める。このとき、 $\tau_n \uparrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) であるから $X_{t \wedge \tau_n}$ について (3.6) を示せばよい。したがって、 X_0, M_t, A_t はすべて有界で f, f'_i, f''_{ij} はすべて有界かつ一様連続としてよい: $|f| + \sum_i |f'_i| + \sum_{ij} |f''_{ij}| \leq K$. $[0, t]$ の分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ をとる。このとき、Taylor の公式により $\xi_k = X_{t_{k-1}}^i + \theta_k(X_{t_k}^i - X_{t_{k-1}}^i)$, $\theta_k \in (0, 1)$ が存在して

¹¹ $x = (x_t)$ が微分可能なら $f \in C^1(\mathbb{R})$ に対し、 $\frac{d}{dt} f(x_t) = f'(x_t) \dot{x}_t$ あるいは積分して $f(x_t) - f(x_0) = \int_0^t f'(x_s) \dot{x}_s ds = \int_0^t f'(x_s) dx_s$.

¹² 一般にセミマルチンゲールは右連続性だけを仮定するのであるが、この授業では連続な場合しか考えない。以降“連続”を略すこともある。

$$\begin{aligned}
f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{k=1}^n (f(X_{t_k}) - f(X_{t_{k-1}})) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^d f'_i(X_{t_{k-1}})(X_{t_k}^i - X_{t_{k-1}}^i) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^d f''_{ij}(\xi_k)(X_{t_k}^i - X_{t_{k-1}}^i)(X_{t_k}^j - X_{t_{k-1}}^j).
\end{aligned}$$

右辺第一項は $\|\Delta\| \rightarrow 0$ としたとき、確率積分の定義より

$$\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s) dM_s^i + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s) dA_s^i$$

に確率収束する (定義 3.2 と補題 2.14 を参照のこと)。第二項は、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^d f''_{ij}(\xi_k)(M_{t_k}^i - M_{t_{k-1}}^i)(M_{t_k}^j - M_{t_{k-1}}^j) + \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^d f''_{ij}(\xi_k)(M_{t_k}^i - M_{t_{k-1}}^i)(A_{t_k}^j - A_{t_{k-1}}^j) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^d f''_{ij}(\xi_k)(A_{t_k}^i - A_{t_{k-1}}^i)(A_{t_k}^j - A_{t_{k-1}}^j) \equiv I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

となるが、ここで、 $A^i = A^{i,+} - A^{i,-}$, $A^{i,+}, A^{i,-} \in \mathcal{A}_{+,c}$ とするとき、

$$|I_2| \leq K \sup_k |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}| (|A_t^+| + |A_t^-|) \rightarrow 0, \quad \|\Delta\| \rightarrow 0, \text{ a.s.}$$

$$|I_3| \leq K \sup_k |A_{t_k} - A_{t_{k-1}}| (|A_t^+| + |A_t^-|) \rightarrow 0, \quad \|\Delta\| \rightarrow 0, \text{ a.s.}$$

となる。ただし、 $M_t = (M_t^1, \dots, M_t^d)$, $A_t^+ = (A_t^{1,+}, \dots, A_t^{d,+})$, $A_t^- = (A_t^{1,-}, \dots, A_t^{d,-})$ と書いた。 I_1 が (3.6) の右辺第三項に収束することを示すために

$$I'_1 := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^d f''_{ij}(X_{t_{k-1}})(M_{t_k}^i - M_{t_{k-1}}^i)(M_{t_k}^j - M_{t_{k-1}}^j)$$

とおく。このとき、定理 2.12 の前で定義した $Q_t(M, \Delta)$ を用いると、

$$\begin{aligned}
|I_1 - I'_1| &\leq \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i,j} \sup_l |f''_{ij}(\xi_l) - f''_{ij}(X_{t_{l-1}})| |M_{t_k}^i - M_{t_{k-1}}^i| |M_{t_k}^j - M_{t_{k-1}}^j| \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{i,j,l} |f''_{ij}(\xi_l) - f''_{ij}(X_{t_{l-1}})| \sum_{m,n} Q_t(M^m; \Delta)^{1/2} Q_t(M^n; \Delta)^{1/2}
\end{aligned}$$

となるから、Schwarz の不等式を 2 回用いることにより、

$$\begin{aligned}
E[|I_1 - I'_1|] &\leq \frac{1}{2} \sum_{m,n} E[\sup_{i,j,l} |f''_{ij}(\xi_l) - f''_{ij}(X_{t_{l-1}})| Q_t(M^m; \Delta)^{1/2} Q_t(M^n; \Delta)^{1/2}] \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{m,n} E[\sup_{i,j,l} |f''_{ij}(\xi_l) - f''_{ij}(X_{t_{l-1}})|^2]^{1/2} E[Q_t(M^m; \Delta) Q_t(M^n; \Delta)]^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2} E[\sup_{i,j,l} |f''_{ij}(\xi_l) - f''_{ij}(X_{t_{l-1}})|]^{1/2} \sum_{m,n} E[Q_t(M^m; \Delta)^2]^{1/4} E[Q_t(M^n; \Delta)^2]^{1/4}
\end{aligned}$$

であるが、補題 2.13 により $\|\Delta\| \rightarrow 0$ のとき右辺 $\rightarrow 0$ となる。更に

$$I_1'' := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^d f_{ij}''(X_{t_{k-1}}) (\langle M^i, M^j \rangle_{t_k} - \langle M^i, M^j \rangle_{t_{k-1}})$$

とする。 $E[(M_{s_2}^i - M_{s_1}^i)(M_{s_2}^j - M_{s_1}^j) - (\langle M^i, M^j \rangle_{s_2} - \langle M^i, M^j \rangle_{s_1}) | \mathcal{F}_{s_1}] = 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned} E[|I_1' - I_1''|^2] &= \frac{1}{4} \sum_k E \left[\left(\sum_{i,j} f_{ij}''(X_{t_{k-1}}) \{ (M_{t_k}^i - M_{t_{k-1}}^i)(M_{t_k}^j - M_{t_{k-1}}^j) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} d\langle M^i, M^j \rangle_s \} \right)^2 \right] \\ &\leq \sum_k K^2 E[|M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|^4 + \sum_{i,j} (\langle M^i, M^j \rangle_{t_k} - \langle M^i, M^j \rangle_{t_{k-1}})^2] \\ &\leq K^2 E \left[\sup_k |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|^2 \sum_i Q_t(M^i; \Delta) \right] \\ &\quad + K^2 \sum_{i,j} E \left[\sup_k |\langle M^i, M^j \rangle_{t_k} - \langle M^i, M^j \rangle_{t_{k-1}}| (\langle M^i, M^j \rangle_t^+ + \langle M^i, M^j \rangle_t^-) \right] \end{aligned}$$

より $E[|I_1' - I_1''|^2] \rightarrow 0$ ($\|\Delta\| \rightarrow 0$)。一方、 $I_2'' \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t f_{ij}''(X_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s$ であるから

$$I_1 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t f_{ij}''(X_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s \rightarrow 0 \text{ in } L^1, \text{ as } \|\Delta\| \rightarrow 0.$$

従って、(3.6) は各 t に対して a.s. に等しいが両辺は t について連続なので確率 1 ですべての t に対して (3.6) が成立する。 \square

定義 3.5 Brown 運動 $B = (B_t)$ が (\mathcal{F}_t) -Brown 運動であるとは

- (i) $B = (B_t)$ は (\mathcal{F}_t) -適合で、
- (ii) $0 \leq \forall s \leq t$ に対し $B_t - B_s$ は \mathcal{F}_s は独立

になるときにする。定義 1.4 で定義した Brown 運動は $\mathcal{F}_s^{0,B}$ -Brown 運動とも言える。

問 3.5 伊藤の公式を用いて $B_t^p = p \int_0^t B_s^{p-1} dB_s + \frac{p(p-1)}{2} \int_0^t B_s^{2p-2} ds$ を示し、それから $E[B_t^{2p}]$, $p \in \mathbb{N}$ を求めよ。(ヒント: Brown 運動 (B_t) の二次変分は $\langle B \rangle_t = t$ であった。)

例 3.1 B_t を x から出発する N 次元 Brown 運動とする。 $f(x) = |x|^m = ((x^1)^2 + \cdots + (x^N)^2)^{1/2}$, $m \geq 2$ とすれば伊藤の公式より

$$|B_t|^m - |x|^m = m \sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i |B_s|^{m-2} dB_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t (Nm + m(m-2)) |B_s|^{m-2} ds$$

を得る。ここで、 $N \geq 3$ で、 $m = 2 - N$, $\sigma_n := \int \{t; |B_t| \leq 1/n\}$ とするとき、

$$|B_{t \wedge \sigma_n}|^m - |x|^m = m \sum_{i=1}^N \int_0^{t \wedge \sigma_n} B_s^i |B_s|^{m-2} dB_s^i$$

であるが、 $x \neq 0$ とするとき、実は $\sigma_n \uparrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) であるので、 $|B_t|^m$ は局所マルチンゲールである。特に、 $N = 3, m = -1$ のときを 3 次の Bessel 過程という。

例 3.2 B_t を x から出発する N 次元 Brown 運動とする。 $f(x) = |x|^m = ((x^1)^2 + \cdots + (x^N)^2)^{1/2}$, $m \geq 2$ とすれば伊藤の公式より

$$|B_t|^m - |x|^m = m \sum_{i=1}^N \int_0^t B_s^i |B_s|^{m-2} dB_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t (Nm + m(m-2)) |B_s|^{m-2} ds$$

を得る。ここで、 $N \geq 3$ で、 $m = 2 - N$, $\sigma_n := \int \{t; |B_t| \leq 1/n\}$ とするとき、

$$|B_{t \wedge \sigma_n}|^m - |x|^m = m \sum_{i=1}^N \int_0^{t \wedge \sigma_n} B_s^i |B_s|^{m-2} dB_s^i$$

であるが、 $x \neq 0$ とするとき、実は $\sigma_n \uparrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) であるので、 $|B_t|^m$ は局所マルチンゲールである。特に、 $N = 3, m = -1$ のときを 3 次の Bessel 過程という。