

情報理論

杉浦 誠

平成16年6月17日

目次

1	符号付測度, 複素測度	3
1.1	Jordan 分解と Hahn 分解	3
1.2	Radon-Nikodym の定理	6
2	微分と積分の関係	10
2.1	Vitali の被覆定理	10
2.2	単調関数の微分	12
2.3	有界変動関数	15
2.4	Lebesgue-Stieltjes 測度	17
3	関数空間	21
3.1	L^p -空間	21
3.2	Euclid 空間上の関数空間	24
3.3	線形作用素、線形汎関数	31
4	Fourier 級数, Fourier 変換	35
4.1	Hilbert 空間, 直交系	35
4.2	Fourier 級数	38
4.3	Fourier 変換	42
4.4	Fourier 変換の応用	46

1 符号付測度, 複素測度

$(X, \mathcal{A})$ を可測空間とする。^{1 2}

1.1 Jordan 分解と Hahn 分解

定義 1.1 集合関数 $\nu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ が σ -加法性: $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, $A_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ なら³

$$\nu(A_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n), \quad (1.1)$$

を満たすとき $(X, \mathcal{A})$ 上の**複素測度** (complex measure) という。特に、 $\nu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ のとき**符号付測度** (signed measure) という。

注意 1.1 (1) ν が $(X, \mathcal{A})$ 上の複素測度なら $\nu(\emptyset) = 0$ 。実際、 $A_n = \emptyset$ ($n \geq 1$) とすると $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=2}^{\infty} A_n = \emptyset$ より

$$\nu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \nu(A_1) + \nu\left(\sum_{n=2}^{\infty} A_n\right) = \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset).$$

$|\nu(\emptyset)| < \infty$ に注意して両辺から $\nu(\emptyset)$ を減ずればよい。また、 $\nu(A_0)$ は $A_1, A_2, \dots$ の並べ方によらないので (1.1) の右辺の収束は絶対収束である。

(2) 集合関数 $\nu: \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$ または $\nu: \mathcal{A} \rightarrow [-\infty, \infty)$ が $\nu(\emptyset) = 0$ および σ -加法性を満たすときを ν を符号付測度と呼ぶこともある。以下、 $\nu: \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty)$ として述べる結果は適切な修正のもと $-\infty$ または ∞ を取る場合も成立する。

例 1.1 (1) $(X, \mathcal{A})$ 上の任意の有限測度 $\mu_j: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ ($j = 1, 2$) に対し、

$$\nu(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A), \quad A \in \mathcal{A} \quad (1.2)$$

によって符号付測度 ν が定義される。後に述べる定理 1.1 より任意の符号付測度 ν は有限測度 $\mu_j: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$) を用いて (1.2) と表わせる。

(2) $(X, \mathcal{A})$ 上の任意の符号付測度 $\nu_j: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$) に対し、

$$\nu(A) = \nu_1(A) + i\nu_2(A), \quad A \in \mathcal{A} \quad (1.3)$$

によって複素測度 ν が定義される。一方、任意の複素測度 ν の実部、虚部は符号付測度なのでそれらを ν_j ($j = 1, 2$) と書けば (1.3) のように表わせる。

定義 1.2 $(X, \mathcal{A})$ 上の測度 μ_1, μ_2 は台が交わらないとき、即ち、 $E, F \in \mathcal{A}$, $X = E + F$ が存在して

$$\mu_1(A) = \mu_1(A \cap E), \quad \mu_2(A) = \mu_2(A \cap F), \quad A \in \mathcal{A}$$

となるとき、互いに**特異** (singular) であるといい、 $\mu_1 \perp \mu_2$ と表わす。

¹このノートは次の URL からダウンロードできます。 <http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/>

²参考文献: [I] 伊藤清三: ルベーク積分入門 裳華房

[N] 西白保敏彦: 測度・積分論 横浜図書

[Y] 谷島賢二: ルベーク積分と関数解析 朝倉書店

ここでは主に [Y] に従って述べるが、上のいずれの文献にも同様の内容が書かれている。

³集合列 $\{A_n\}$ に対し $A_0 = \sum A_n$ により $A_0 = \bigcup A_n$ かつ $A_m \cap A_n = \emptyset$ ($m \neq n$) を意味するものとする。

問 1.1 $\mu_1 \perp \mu_2$ であるための必要十分条件は $E, F \in \mathcal{A}, X = E + F$ が存在して $\mu_1(F) = \mu_2(E) = 0$ となることであることを示せ。(これより、 $\mu_1 \perp \mu_2$ と $\mu_2 \perp \mu_1$ が同値であることがわかる。)

この節の目的は次の定理を証明することにある。

定理 1.1 (Jordan 分解) ν を $(X, \mathcal{A})$ 上の符号付測度とする。このとき、 $\nu = \nu^+ - \nu^-$ 、即ち

$$\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A), \quad A \in \mathcal{A} \quad (1.4)$$

を満たす互いに特異な有限測度 ν^+, ν^- が一意的に存在する。これを **Jordan 分解** という。また、 ν^+ を正変動、 ν^- を負変動、 $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ を **全変動** (*total variation*) という。

例 1.2 $(X, \mathcal{A})$ 上の測度 $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ と $f \in L^1(\mu)$ に対し⁴、 $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{A} \quad (1.5)$$

と定めると ν は複素測度となる。もし、 f が実数値であれば ν は符号付測度であるが

$$\nu^+(A) = \int_A f^+ d\mu, \quad \nu^-(A) = \int_A f^- d\mu, \quad A \in \mathcal{A} \quad (1.6)$$

とすれば $\nu = \nu^+ - \nu^-$ は ν の *Jordan 分解* である。ただし、 $f^\pm = \max\{0, \pm f\}$ と定める。

定義 1.3 ν を符号付測度とする。 $E \in \mathcal{A}$ が任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $\nu(A \cap E) \geq 0$ (≤ 0) を満たすとき、 ν の **正集合** (**負集合**) という。

補題 1.2 (1) E が正かつ負集合ならば任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $\nu(E \cap A) = 0$ 。

(2) 正集合の可測部分集合は正集合。

(3) $E_1, E_2, \dots$ が正集合ならば、 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ も正集合。

(4) (2), (3) は正集合を負集合に置き換えても成立する。

証明: (1) 定義より $\nu(E \cap A) \geq 0$ かつ ≤ 0 より $=$ を得る。

(2) F を正集合 E の可測部分集合とすると、 $A \in \mathcal{A}$ ならば $A \cap F \in \mathcal{A}$ より $\nu(F \cap A) = \nu(E \cap F \cap A) \geq 0$ 。

(3) $F_1 = E_1, F_n = E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k$ とすると (2) より F_n は正集合。よって、 $A \in \mathcal{A}$ ならば $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap A) = \nu(\sum_{n=1}^{\infty} F_n \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n \cap A) \geq 0$ 。

(4) (2), (3) で $\geq$ を $\leq$ として成立するのでよい。 $\square$

補題 1.3 $\nu(E) > 0$ であれば $\nu(F) > 0$ かつ $F \subset E$ なる正集合 F が存在する。

証明: E 自身が正集合なら $F = E$ とすればよい。 E が正集合でなければ

$$a_1 \equiv \sup\{-\nu(A); A \subset E, A \in \mathcal{A}\} > 0$$

⁴ $L^1(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は可測で } \int_X |f| d\mu < \infty\}$: μ -可積分関数の全体を表わす。

より自然数 $n_1 \geq 1$ と $A_1 \in \mathcal{A} : A_1 \subset E$ を $\frac{1}{n_1} < a_1 \leq \frac{1}{n_1-1}$, $-\nu(A_1) > \frac{1}{n_1}$ と選べる。このとき、 $\nu(E \setminus A_1) = \nu(E) - \nu(A_1) > \nu(E) > 0$ 。もし、 $E \setminus A_1$ が正集合であれば $F = E \setminus A_1$ とすればよい。 $E \setminus A_1$ が正集合でなければ

$$a_2 \equiv \sup\{-\nu(A); A \subset E \setminus A_1, A \in \mathcal{A}\} > 0$$

となるが、自然数 $n_2 \geq n_1$ と $A_2 \in \mathcal{A}$ を $\frac{1}{n_2} < a_1 \leq \frac{1}{n_2-1}$, $-\nu(A_2) > \frac{1}{n_2}$ と選べる。これを繰り返す。有限回 (k 回) の後に $E \setminus \sum_{l=1}^{k-1} A_l$ が正集合なら $F = E \setminus \sum_{l=1}^{k-1} A_l$ ととれば補題は成立する。そうでなければ、 $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots$ と互いに素な $A_1, A_2, \dots \subset E$ で

$$a_k \equiv \sup\{-\nu(A); A \subset E \setminus \sum_{l=1}^{k-1} A_l, A \in \mathcal{A}\} > 0, \quad \frac{1}{n_k} < -\nu(A_k) \leq a_k \leq \frac{1}{n_k-1}$$

となるようにできる。このとき、 $F = E \setminus \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ が求める F である。実際、

$$\nu(F) = \nu(E) + \sum_{k=1}^{\infty} (-\nu(A_k))$$

より、 $\nu(F) > 0$ 。また、 ν は実数値より $\nu(F) < \infty$ だから

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < -\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) = \nu(F) - \nu(E) < \infty$$

より $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$ 。よって、 $B \subset F$ ならば特に $B \subset E \setminus \sum_{l=1}^{k-1} A_l$ より $-\nu(B) \leq a_k \leq \frac{1}{n_k-1}$ 。 $k \rightarrow \infty$ として $-\nu(B) \leq 0$ 、即ち、 $\nu(B) \geq 0$ を得る。 $\square$

定理 1.4 (Hahn 分解) ν を $(X, \mathcal{A})$ 上の符号付測度とする。このとき、 ν の正集合 E^+ と負集合 E^- による X に分割 $X = E^+ + E^-$ が存在する。

証明: $M = \sup\{\nu(E); E \in \mathcal{A} \text{ は正集合}\}$ とおくと、 $\emptyset$ は正集合なので $M \geq 0$ 。正集合の列 $E_1, E_2, \dots$ を $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu(E_k) = M$ ととると、補題 1.2 (3) より $E^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ は正集合。よって、 $M \geq \nu(E^+) = \nu(E_j) + \nu(E^+ \cap E_j^c) \geq \nu(E_j)$ であるから $j \rightarrow \infty$ として $\nu(E^+) = M$ を得る。(これより $M < \infty$ も従う。) 次に、 $E^- = X \setminus E^+$ が負集合を示す。もし E^- が負集合でなければ、 $A \subset E^-$, $\nu(A) > 0$ が存在する。よって、補題 1.3 より $B \subset A$ なる正集合 B , $\nu(B) > 0$ がとれるが、このとき補題 1.2 (3) より $E^+ \cup B$ は正集合であるが、 $\nu(E^+ \cup B) = \nu(E^+) + \nu(B) > M$ となりこれは M の定義に矛盾する。 $\square$

定理 1.1 の証明: ν の正集合 E^+ と負集合 E^- による X に分割 $X = E^+ + E^-$ を用い、

$$\nu^+(A) = \nu(A \cap E^+), \quad \nu^-(A) = -\nu(A \cap E^-), \quad A \in \mathcal{A}$$

と定めると、(1.4) が成り立ち、 ν^+, ν^- は $(X, \mathcal{A})$ 上の有限測度で $\nu^+ \perp \nu^-$ となることは容易に確かめられる。次に $\nu = \mu^+ - \mu^-$ をもう一つの Jordan 分解とすると、 $A \in \mathcal{A}$ に対し

$$\mu^+(A) \geq \mu^+(A \cap E^+) \geq \nu(A \cap E^+) = \nu^+(A).$$

一方、 $F^+ \in \mathcal{A}$, $F^- = X \setminus F^+$ を $\mu^+(A) = \mu^+(A \cap F^+)$, $\mu^-(A) = \mu^-(A \cap F^-)$ ととれば

$$\nu^+(A) \geq \nu^+(A \cap F^+) \geq \nu(A \cap F^+) = \mu^+(A \cap F^+) + \mu^-(A \cap F^+) = \mu^+(A).$$

よって、 $\nu^+ = \mu^+$ 。同様に $\nu^- = \mu^-$ も従う。 $\square$

演習問題 1.1 $\nu = \nu_1 - \nu_2$ を符号付測度 ν の Jordan 分解とすると、 $f \in L^1(|\nu|)$ に対して

$$\int_X f d\nu = \int_X f d\nu_1 - \int_X f d\nu_2$$

と定義する。このとき、

$$\left| \int_X f d\nu \right| \leq \int_X |f| d|\nu|$$

を示せ。また、任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $\int_A f d\nu = |\nu|(A)$ となる可測関数 $|f| \leq 1$ が存在することを示せ。

1.2 Radon-Nikodym の定理

ここでは測度、符号付測度のみを扱い、特に断らない限り可測空間 $(X, \mathcal{A})$ 上で考えることとする。複素測度は一般に例 1.1(2) (1.2) のように表わせることを用いれば同様な結果を得られる。

定義 1.4 μ は測度、 ν は測度あるいは符号付測度とする。 $A \in \mathcal{A}$ かつ $\mu(A) = 0$ ならば $\nu(A) = 0$ (ν が測度のとき) $|\nu|(A) = 0$ (ν が符号付測度のとき) が成り立つとき、 ν は μ に関して**絶対連続** (*absolutely continuous*) であるといい、 $\nu \ll \mu$ と表わす。

例 1.3 例 1.2 で見たように測度 μ に対し $f \in L^1(\mu)$ が実数値であれば $\nu(A) = \int_A f d\mu$, $A \in \mathcal{A}$ で定まる ν は符号付測度であるが、このとき $\nu \ll \mu$ である。また、 f が非負可測であれば $\nu(A) = \int_A f d\mu$, $A \in \mathcal{A}$ で定まる測度 ν は μ に関して絶対連続である。

補題 1.5 μ は測度、 ν, ν_1, ν_2 は測度または符号付測度とする。⁵

(1) $\nu_1 \ll \mu, \nu_2 \ll \mu$ ならば $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

(2) $\nu_1 \perp \mu, \nu_2 \perp \mu$ ならば $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

(3) $\nu \ll \mu, \nu \perp \mu$ ならば $\nu = 0$.

証明: (1) 明らか。(2) $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ を $|\nu_1|(A_1) = |\nu_2|(A_2) = \mu(A_1^c) = \mu(A_2^c) = 0$ とできる。この時、 $A = A_1 \cap A_2$ とすると、

$$|\nu_i(A)| \leq |\nu_i|(A_i) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \mu(A^c) \leq \mu(A_1^c) + \mu(A_2^c) = 0$$

となる。よって、 $|\nu_1 + \nu_2|(A) \leq |\nu_1|(A) + |\nu_2|(A)$ と合わせて $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$ を得る。

(3) $\nu \perp \mu$ より $A \in \mathcal{A}$ を $|\nu|(A) = \mu(A^c) = 0$ ととれる。一方、 $\nu \ll \mu$, $\mu(A^c) = 0$ より $|\nu|(A^c) = 0$. 従って、 $|\nu|(X) = |\nu|(A) + |\nu|(A^c) = 0$. $\square$

定理 1.6 (Radon-Nikodym) μ, ν を σ -有限な測度で $\nu \ll \mu$ とする。このとき、非負可測関数 f が存在して

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{A} \tag{1.7}$$

となる。この f は μ の零集合上の違いを除いて一意である。 f を ν の μ に関する **Radon-Nikodym 導関数** とよび $\frac{d\nu}{d\mu}$ と表わす。

⁵符号付測度 ν と測度 μ に対しては $\mu \perp \nu$ であるとは ν の全変動 $|\nu|$ に対して $\mu \perp |\nu|$ と定義する。

系 1.7 μ を σ -有限な測度、 ν を符号付測度で $\nu \ll \mu$ とする。このとき、 $f \in L^1(\mu)$ (実数値) が存在して (1.7) となる。この f は μ の零集合上の違いを除いて一意である。

証明: 定理 1.1 により $\nu = \nu_1 - \nu_2$ と分解すると、 $0 \leq \nu_1(A) + \nu_2(A) = |\nu|(A)$, $A \in \mathcal{A}$ より $\nu_1 \ll \mu, \nu_2 \ll \mu$ となる。よって、それぞれに定理 1.6 を用いその Radon-Nikodym 微分を f_1, f_2 とすれば、 $f = f_1 - f_2$ が求めるそれとなる。 $\square$

定理 1.6 の証明⁶: (0) 一意性は容易なので演習問題とする。

(i) $\mu(X) < \infty$ かつ $\nu(X) < \infty$ の場合。

$$\mathcal{G} = \{f \in L^1(\mu); f \geq 0 \text{ かつ } \forall A \in \mathcal{A} \text{ に対して } \int_A f d\mu \leq \nu(A)\} \quad (1.8)$$

とおくと、 $f \equiv 0 \in \mathcal{G}$ より $\mathcal{G} \neq \emptyset$. よって、

$$\alpha = \sup\left\{\int_X f d\mu; f \in \mathcal{G}\right\} \quad (1.9)$$

とおくと、 $0 \leq \alpha \leq \nu(X) < \infty$ であり、関数列 $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{G}$ を

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu = \alpha \quad (1.10)$$

と選べる。ここで $f(x) = \sup_{n \geq 1} \varphi_n(x)$ とおくと

$$(a) f \in \mathcal{G}, \quad (b) \int_X f d\mu = \alpha \quad (1.11)$$

を示す。 $A \in \mathcal{A}$ とする。 $f_n(x) = \sup\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ に対し、 $A_1 = \{x \in A; f_1(x) = \varphi_1(x)\}$, $A_k = \{x \in A; f_n(x) = \varphi_k(x)\} \setminus \sum_{j=1}^{k-1} A_j$ とおくと $A = \sum_{k=1}^n A_k$ より

$$\int_A f_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \varphi_k d\mu \leq \sum_{k=1}^n \nu(A_k) = \nu(A). \quad (1.12)$$

$f_n \geq 0$, f_n は n について単調増加で $\lim f_n = f$ より、単調収束定理により

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \leq \nu(A). \quad (1.13)$$

よって (1.11a) は示された。一方、(1.9), (1.10) より

$$\alpha \geq \int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu = \alpha \quad (1.14)$$

となり (1.11b) も示された。

(ii) (i) で定義した f に対して $\nu(A) = \int_A f d\mu$ を示す。このために次の補題を準備する。

⁶Hilbert 空間論における Riesz の表現定理を用いて証明することもできる。(cf. 伊藤雄二: 確率論, 朝倉書店, W. Rudin: Real and Complex Analysis, McGraw-Hill など)

補題 1.8 $\mu(X) < \infty$ とし、 ν を恒等的に 0 ではない測度で $\nu \ll \mu$ とする。このとき、ある $n \in \mathbb{N}$ と $\mu(A_n) > 0$ なる $A_n \in \mathcal{A}$ が存在して

$$\forall A \in \mathcal{A} : A \subset A_n \text{ に対して } \nu(A) \geq \frac{1}{n}\mu(A) \quad (1.15)$$

が成立する。

証明: $\mu(X) < \infty$ より $\nu_n(A) = \nu(A) - \frac{1}{n}\mu(A)$ に Hahn の分解定理 1.4 を適用すると、 ν_n の正集合 A_n と負集合 $X \setminus A_n$ がとれる: 即ち、

$$\forall A \subset A_n \text{ に対して } \nu(A) \geq \frac{1}{n}\mu(A), \quad \forall A \subset X \setminus A_n \text{ に対して } \nu(A) \leq \frac{1}{n}\mu(A) \quad (1.16)$$

となる。ここで、 $\mu(A_n) > 0$ なる n が存在することを示せばよい。もし、すべての n に対して $\mu(A_n) = 0$ であれば、 $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおくと $\mu(A_0) = 0$. よって、 $\nu \ll \mu$ より $\nu(A_0) = 0$. 一方、任意の $A \subset X \setminus A_0$ をとるとき、すべての n に対して $A \subset X \setminus A_n$ だから (1.16) により

$$0 \leq \nu(A) \leq \frac{1}{n}\mu(A) \leq \frac{1}{n}\mu(X).$$

ここで、 $\mu(X) < \infty$ であるから $n \rightarrow \infty$ として $\nu(A) = 0$ を得る。よって、 $\nu(X) = 0$ となりこれは ν が恒等的に 0 ではないことに矛盾する。 $\square$

定理 1.6 の証明の続き: $\lambda(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu$, $A \in \mathcal{A}$ とおくと、(i) より λ は測度で補題 1.5 (1) より $\lambda \ll \mu$. よって、 λ が恒等的に 0 でなければ、補題 1.8 より $n \in \mathbb{N}$ と $\mu(A_n) > 0$ なる $A_n \in \mathcal{A}$ が存在して

$$\forall A \in \mathcal{A} : A \subset A_n \text{ に対して } \lambda(A) \geq \frac{1}{n}\mu(A) \quad (1.17)$$

が成立する。この時 $g(x) = f(x) + \frac{1}{n}1_{A_n}(x)$ とおくと⁷、 $g \geq 0$, $g \in L^1(\mu)$ で任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し

$$\int_A g d\mu = \int_A f d\mu + \frac{1}{n}\mu(A \cap A_n) \leq \int_A f d\mu + \lambda(A \cap A_n) \leq \int_A f d\mu + \lambda(A) = \nu(A),$$

即ち、 $g \in \mathcal{G}$. ところが、 $\mu(A_n) > 0$ に注意すると

$$\int_X g d\mu = \int_X f d\mu + \frac{1}{n}\mu(A_n) > \int_X f d\mu = \alpha$$

となりこれは (1.9) に矛盾する。以上より、 $\mu(X) < \infty$ の場合の証明は完了した。

(iii) μ が σ -有限な測度であれば $\{X_n\} \subset \mathcal{A}$ を $\sum_{j=1}^{\infty} X_n = X$ かつ $\mu(X_n) < \infty$ ととれる。各 X_n 上で (1.7) を満たす f_n をとり、 $f(x) = f_n(x)$ on X_n とすれば $f \geq 0$ で $A \in \mathcal{A}$ に対し

$$\int_A f d\mu = \sum \int_{X_n \cap A} f_n d\mu = \sum \nu(X_n \cap A) = \nu(A). \quad \square$$

⁷ 1_A で集合 A の定義関数を表わす: $1_A(x) = 1$ ($x \in A$), $= 0$ ($x \notin A$).

定理 1.9 (Lebesgue 分解) μ を σ -有限な測度、 ν を σ -有限な測度または符号付測度とすると次を満たす符号付測度の組 (ν_a, ν_s) が唯一つ存在する:

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \quad \nu_a \ll \mu, \quad \nu_s \perp \mu. \quad (1.18)$$

ν_a, ν_s をそれぞれ ν の**絶対連続部分**, **特異部分**とよぶ。

証明: ν が測度のときのみ示す。 $\lambda = \mu + \nu$ とする。 λ は σ -有限な測度で $\mu \ll \lambda$ かつ $\nu \ll \lambda$ 。従って、Radon-Nikodym の定理 1.6 より非負可測関数 f が存在して $\mu(A) = \int_A f d\lambda$, $A \in \mathcal{A}$ とできる。 $E = \{x; f(x) > 0\}$ とし $\nu_a(A) = \nu(A \cap E)$, $\nu_s(A) = \nu(A \cap E^c)$ とおくと明らかに $\mu(E^c) = \nu_s(E) = 0$ より $\nu_s \perp \mu$ 。 $\nu_a \ll \mu$ を示すために $\mu(A) = 0$ なる $A \in \mathcal{A}$ をとると、

$$0 = \mu(A) = \int_A f d\lambda = \int_{A \cap E} f d\lambda$$

より $f > 0$ on E に注意すると、 $\lambda(A \cap E) = 0$ を得る。 よって、 $\nu \ll \lambda$ より $\nu(A \cap E) = 0$ 。 故に、 $\nu_a(A) = \nu(A \cap E) = 0$ 。

一意性を示すために $\nu = \nu_0 + \nu_1$, $\nu_0 \ll \mu$, $\nu_1 \perp \mu$ をもう一つの分解とすると、補題 1.5 (1), (2) より

$$\nu_a - \nu_0 = \nu_1 - \nu_s, \quad \nu_a - \nu_0 \ll \mu, \quad \nu_1 - \nu_s \perp \mu.$$

となるので補題 1.5 (3) より $\nu_a - \nu_0 = \nu_1 - \nu_s = 0$ を得る。 $\square$

注意 1.2 μ が σ -有限な測度でないときは、Radon-Nikodym の定理は必ずしも成立しない。

反例: $X = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ は $[0, 1]$ 上の Lebesgue 可測集合族とする。更に、 m を $[0, 1]$ 上の Lebesgue 測度、 μ を個数測度⁸とする。この時、 $\mu(A) = 0$ なら $A = \emptyset$ より $m(A) = 0$ となるから $\mu \ll m$ 。もし、(1.7) を満たす f が存在すれば $f \equiv 0$ となる。実際、 $A = \{x\}$ とすると $m(A) = 0$, $\int_A f d\mu = f(x)\mu(\{x\}) = f(x)$ であるからである。しかし、これを (1.7) に代入すると、 $m = 0$ となるがこれは明らかに矛盾である。

注意 1.3 ν が複素測度のとき、その全変動を次のように定義する:

$$|\nu|(A) = \sup \left\{ \sum_{F \in \mathcal{F}} |\nu(F)|; \mathcal{F} \text{ は } A \text{ の有限 } \mathcal{A}\text{-分割} \right\}.$$

ここで、 $\mathcal{F}$ が A の有限 $\mathcal{A}$ -分割であるとは $\mathcal{F}$ が有限集合で $\sum_{F \in \mathcal{F}} F = A$ なるときにいう。このとき、 $|\nu|$ は測度である (cf. [I] p.133)。

μ が測度、 ν が複素測度のとき $\mu \perp \nu$, $\nu \ll \mu$ をそれぞれ定義 1.2, 1.4 で定義すると $f \in L^1(\mu)$ として定理 1.6, 定理 1.9 が成立することが知られている。

演習問題 1.2 Radon-Nikodym 微分について次を示せ。

$$(1) \quad \nu \ll \mu \text{ なら任意の } f \in L^1(|\nu|) \text{ に対して } \int_X f d\nu = \int_X f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

⁸ $\mu(A) = \#A$ (A の元の個数) なる測度 μ を個数測度という (cf. [N] p.51)。 $X = [0, 1]$ は非可算無限集合なので、この μ は σ -有限でない。

$$(2) \quad \nu_1, \nu_2 \ll \mu \text{ なら } \frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}.$$

$$(3) \quad \nu \ll \mu, \mu \ll \lambda \text{ なら } \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\lambda}.$$

$$(4) \quad \nu \ll \mu \text{ かつ } \mu \ll \lambda \text{ (この時 } \mu \text{ と } \nu \text{ は同値であるという) なら } \frac{d\nu}{d\lambda} = \left(\frac{d\mu}{d\nu} \right)^{-1}.$$

2 微分と積分の関係

$\mathcal{B}^d$ で $\mathbb{R}^d$ の Borel 集合族 ($\mathbb{R}^d$ の開集合全体を含む最小の σ -加法族) を表わす。 $\mu : \mathcal{B}^1 \rightarrow [0, \infty]$ を $\mathbb{R}$ 上の (σ -有限な) 測度とし、 $F(x) = \mu((0, x])$ ($x \geq 0$), $= \mu((x, 0])$ ($x \leq 0$) とすると、(i) $F(x)$ は単調増加で、(ii) 右連続、即ち、 $\lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x_0)$ を満たす。逆に次の定理が知られている。証明は 2.4 節で与える。

定理 2.1 (Lebesgue-Stieltjes 測度) 関数 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) が単調増加かつ右連続とする⁹。このとき、 $\mathcal{B}_{(a,b]} = \{(a, b] \cap B; B \in \mathcal{B}^1\}$ 上の測度 μ_F が存在して

$$\mu_F((s, t]) = F(t) - F(s) \quad a \leq s < t \leq b$$

を満たす。この μ_F を F に関する **Lebesgue-Stieltjes 測度** という。

注意 2.1 (1) $\int_A f(x) \mu_F(dx) = \int_A f(x) dF(x)$ と表わすことが多い。

(2) $F(x) = x$ の時 μ_F は Lebesgue 測度となる。

では、定理のような関数 F が与えられたとして μ_F の $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度 m に関して定理 1.9, 定理 1.6 を用いると可測関数 f と測度 $\mu_{F,s}$ が存在して

$$\mu_F(A) = \int_A f(x) m(dx) + \mu_{F,s}(A), \quad A \in \mathcal{B}^1, \quad \mu_{F,s} \perp m \quad (2.1)$$

とできる。もちろん、 F が C^1 -級なら、 $F'(x) = f(x)$ かつ $\mu_{F,s} = 0$ となることが容易に推測できる。この章では、有界変動な関数 F についてこのことを考察する。¹⁰

2.1 Vitali の被覆定理

定義 2.1 $E \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{I}$ は正の長さをもつ区間の集合とする。任意の $x \in E$ に対して、 x を含む長さがいくらでも短い $I \in \mathcal{I}$ が存在するとき、 $\mathcal{I}$ は E の **Vitali 被覆** であるという。

定理 2.2 (Vitali の被覆定理) $E \subset \mathbb{R}$ を Lebesgue 外測度が有限な集合、 $\mathcal{I}$ を E の Vitali 被覆とする。このとき、 $m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j) = 0$ を満たす互いに素な区間の列 $\{I_j\} \subset \mathcal{I}$ が存在する。また、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j) < \varepsilon$ を満たす互いに素な区間の列 $I_1, \dots, I_N \in \mathcal{I}$ が存在する。ただし、 m^* は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 外測度を表わす。

⁹ $a = -\infty$ のとき $[a$ は $(a$ と、 $b = \infty$ のとき $b]$ は $b)$ と解釈するものとする。以下も同様。

¹⁰ ここでは $\mathbb{R}$ 上で考えるが、一般に $\mathbb{R}^d$ 上でも同様な考察を行うことができる。(cf. W. Rudin: Real and Complex Analysis, McGraw-Hill など)

証明: 測度有限な開集合 $O \supset E$ を任意にとり、 $\tilde{I} = \{\bar{I}; I \in \mathcal{I}, \bar{I} \subset O\}$ とする。任意の $x \in E$ に対して $x \in I \subset O$ なるいくらでも短い $I \in \mathcal{I}$ が存在するから、 $\tilde{I}$ も E の Vitali 被覆である。よって、 $N \in \mathbb{N}$ または $N = \infty$ に対して $m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j) = m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^N \bar{I}_j)$ となるから、 $\tilde{I}$ に対して主張を証明すればよい。

$\{I_j\} \subset \tilde{I}$ を次のように帰納的に選ぶ:

- (1) $I_1 \in \tilde{I}$ を任意に選ぶ。
- (2) 互いに素な $I_1, \dots, I_n \in \tilde{I}$ が選ばれたとすると。もし $\bigcup_{j=1}^n I_j \supset E$ ならここで打ち切る。そうでなければ、ある $x \in E \setminus \bigcup_{j=1}^n I_j$ が存在する。 $\tilde{I}$ は Vitali 被覆でそれぞれ閉区間であるから、 $x \in I$ かつ $I \cap \bigcup_{j=1}^n I_j = \emptyset$ なる $I \in \tilde{I}$ が存在する。これより、

$$0 < k_n \equiv \sup\{|I|; I \in \tilde{I}, I \cap \bigcup_{j=1}^n I_j = \emptyset\} \quad (2.2)$$

である。そこで、 $I_{n+1} \in \tilde{I}$ を

$$I_{n+1} \cap \bigcup_{j=1}^n I_j = \emptyset, \quad k_n/2 \leq |I_{n+1}| \leq k_n \quad (2.3)$$

ととる。

このように選んだ $\{I_j\} \subset \tilde{I}$ は次のいずれかを満たす:

- (i) 有限回の後に $\bigcup_{j=1}^n I_j \supset E$ となる。
- (ii) 互いに素な区間の無限列 $\{I_j\} \subset \tilde{I}$ で各 n に対し (2.3) が成立する。

(i) の場合証明は終了している。(ii) の場合、 $\{I_j\} \subset \tilde{I}$ は互いに素で $I_j \subset O$ だから $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \leq m(O) < \infty$. 従って任意の $\varepsilon > 0$ に対し $N \in \mathbb{N}$ を $\sum_{j=N+1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon/5$ ととれる。このとき、

$$R \equiv E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j \subset \bigcup_{j=N+1}^{\infty} 5I_j \quad (2.4)$$

であることを証明すればよい。実際、 $m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j) \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} 5|I_j| < \varepsilon$ となるからである。ただし、 $5I$ とは I と中心が同じで長さが5倍の区間のことである。

$x \in R$ とする。 $x \in I$ なる $I \in \tilde{I}$ で $I \cap \bigcup_{j=1}^N I_j = \emptyset$ をとると、この I は $I_{N+1}, I_{N+2}, \dots$ のどれかと交わる。というのは、どれとも交わらないとすると任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $I \cap \bigcup_{j=1}^n I_j = \emptyset$ であるから (2.2) より $|I| \leq k_n$. このとき、 $k_n \rightarrow 0$ となるから $|I| = 0$ となり矛盾するからである。 N_0 で I_j が初めて I と交わる番号とする:

$$I \cap I_{N_0} \neq \emptyset, \quad I \cap \bigcup_{j=1}^{N_0-1} I_j = \emptyset.$$

このとき (2.2), (2.3) より $|I| \leq k_{N_0-1}$, $k_{N_0-1}/2 \leq |I_{N_0}|$ となるから、 $|I| \leq 2|I_{N_0}|$. I と I_{N_0} は交わるので、このとき $I \subset 5I_{N_0}$. 故に $x \in 5I_{N_0}$ となり (2.4) を得る。□

注意 2.2 Vitali の被覆定理において E は可測集合とは仮定されていない。このことは次の定理 2.3 の証明において役立つ。実際、集合 $E_{u,v}$ が可測かどうかははじめからはわからないからである。

問 2.1 定理 2.2 の証明をまねて次を示せ。外測度有限な集合 $E \subset \mathbb{R}$ が区間の族 $\{I_\lambda\}$ で覆われているとする。このとき、 $\{I_\lambda\}$ の中から有限あるいは可算個の互いに素な区間の列 $\{I_{\lambda_j}\}$ を選んで $\sum_j |I_{\lambda_j}| \geq \frac{1}{5} m^*(E)$ とすることができる。これを示せ。

問 2.2 $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 f に対してその極大関数 $f^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)| dy$, $x \in \mathbb{R}$ と定義する。このとき、任意の $t > 0$ に対して

$$m(\{x \in \mathbb{R}; f^*(x) > t\}) \leq \frac{5}{t} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$$

であることを示せ。これを極大不等式と言う。

Hint: まず $\sup_{r>0}$ は $\sup_{r>0, r \in \mathbb{Q}}$ としてもよいことに注意し f^* が可測であることを示す。次に、 $f^*(x) > t$ なる $x \in \mathbb{R}$ に対し、 $\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)| dy > t$ となる $r > 0$ を r_x と書き、 $I_x = (x - r_x, x + r_x)$ と定める。このとき、 $\{I_x\}$ は $\{x \in \mathbb{R}; f^*(x) > t\}$ の被覆であることに注意し問 2.1 を用いよ。

2.2 単調関数の微分

定理 2.3 (Lebesgue の定理) 区間 $[a, b]$ 上の単調増加関数 F はほとんど至るところ微分可能で、その導関数 F' は可積分である。更に、不等式

$$\int_{\alpha}^{\beta} F'(x) dx \leq F(\beta + 0) - F(\alpha + 0) \quad (2.5)$$

が任意の $a \leq \alpha < \beta \leq b$ に対して成立する。

証明: $x \leq a$ なら $F(x) = F(a)$, $x \geq b$ なら $F(x) = F(b)$ として F を $\mathbb{R}$ 全体で定義しておく。 $a \leq x \leq b$ に対して

$$D^{\pm}F(x) = \overline{\lim}_{h \downarrow 0} \frac{F(x \pm h) - F(x)}{\pm h}, \quad D_{\pm}F(x) = \underline{\lim}_{h \downarrow 0} \frac{F(x \pm h) - F(x)}{\pm h},$$

と定義する。明らかに $D_+F(x) \leq D^+F(x)$, $D_-F(x) \leq D^-F(x)$ だから、

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \text{ が収束する} \\ \iff D^+F(x) &\leq D_-F(x) \text{ かつ } D^-F(x) \leq D_+F(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

である。(2.6) の右辺が成立しない x の集合 $E = E^+ \cup E^-$ が零集合であることを示す。ただし、

$$E^+ = \{x \in [a, b]; D^+F(x) > D_-F(x)\}, \quad E^- = \{x \in [a, b]; D^-F(x) > D_+F(x)\}$$

とする。 $m^*(E^+) = 0$ を示す。 $m^*(E^-) = 0$ も同様に示せる。このため任意の $u > v$ に対して

$$m^*(E_{u,v}) = 0, \quad E_{u,v} = \{x \in [a, b]; D^+F(x) > u > v > D_-F(x)\} \quad (2.7)$$

を示せばよい。というのは $E^+ = \bigcup_{u,v \in \mathbb{Q}; u > v} E_{u,v}$ となるからである。 $s = m^*(E_{u,v})$ とかく。任意に $\varepsilon > 0$ をとっておく。開集合 $O \supset E_{u,v}$ を $m(O) < s + \varepsilon$ ととる。 $x \in E_{u,v}$ なら、 $v > D_-F(x)$ だから $F(x) - F(x-h) < hv$ なるいくらで小さい $h > 0$ などとれる。従って、閉区間の族

$$\mathcal{I} = \{[x-h, x]; x \in E_{u,v}, h > 0, [x-h, x] \subset O \text{ で } F(x) - F(x-h) < hv\}$$

は $E_{u,v}$ の Vitali 被覆である。定理 2.2 を用いて $\mathcal{I}$ に含まれる互いに素な区間列 $\tilde{I}_j = [x_j - h_j, x_j]$, $j \in \mathbb{N}$, を $m^*(E_{u,v} \setminus \cup_{j=1}^{\infty} \tilde{I}_j) = 0$ ととる。 $\cup_{j=1}^{\infty} \tilde{I}_j$ 上の F の増分について

$$\sum_{j=1}^{\infty} (F(x_j) - F(x_j - h_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v h_j \leq v m(O) < v(s + \varepsilon) \quad (2.8)$$

が成り立つ。 $I_j = (x_j - h_j, x_j)$, $j \in \mathbb{N}$ とする。 $m^*(E_{u,v} \setminus \cup_{j=1}^{\infty} I_j) = 0$ でもある。

$$A = E_{u,v} \cap \cup_{j=1}^{\infty} I_j$$

と定めると、 $m^*(A) = m^*(E_{u,v}) = s$ となる。 $y \in A$ なら $D^+F(y) > u$ でもあるから、 $F(y+k) - F(y) > ku$ をみたすいくらで小さい $k > 0$ が存在する。 今、 $y \in I_j$ なる j が存在し I_j が开区間であることを考慮すると、 $k > 0$ が十分小さいければ $[y, y+k]$ は I_j に含まれる。 これから、

$$\mathcal{J} = \{ [y, y+k]; xy \in A, k > 0, \exists j : [y, y+k] \subset I_j \text{ で } F(y+k) - F(y) > ku \}$$

は再び A の Vitali 被覆である。 定理 2.2 を用いて $\mathcal{J}$ に含まれる互いに素な区間列 $J_i = [y_i, y_i + k_i]$, $i = 1, \dots$, を $m^*(A \setminus \cup_{i=1}^{\infty} J_i) = 0$ ととる。 $m^*(A \cap \cup_{i=1}^{\infty} J_i) = m^*(A) = s$ である。 F の $\cup_{i=1}^{\infty} J_i$ 上の増分は

$$\sum_{i=1}^{\infty} (F(y_i + k_i) - F(y_i)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} k_i u \geq u m^*(A \cap \cup_{i=1}^{\infty} J_i) = us. \quad (2.9)$$

一方、 F は単調増加で $\{J_i\}$ は互いに素でそれぞれある I_j に含まれるから、 (2.8), (2.9) によって

$$us \leq \sum_{i=1}^{\infty} (F(y_i + k_i) - F(y_i)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (F(x_j) - F(x_j - h_j)) \leq v(s + \varepsilon).$$

$u > v$ で $\varepsilon > 0$ は任意であったから $s = m^*(E_{u,v}) = 0$ を得る。

以上で $0 \leq F'(x) \leq \infty$ がほとんど至るところ定義できた。 次に F' は可積分、よってほとんど至るところ有限で、 (2.5) が成り立つことを示す。 $F'(x)$ が $(+\infty)$ をこめて存在する x に対しては、例えば特に $h \rightarrow 0$ を $1/n \rightarrow 0$ としても同じ極限となるので

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x), \quad G_n(x) \equiv n \left\{ F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \right\}.$$

ここで、 $G_n(x)$ は可測より $F'(x)$ も可測で、 F は単調増加だったから $G_n \geq 0$. 故に、Fatou の補題より

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} F'(x) dx &\leq \underline{\lim} \int_{\alpha}^{\beta} G_n(x) dx \leq \underline{\lim} n \left\{ \int_{\alpha + \frac{1}{n}}^{\beta + \frac{1}{n}} F(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx \right\} \\ &\leq \underline{\lim} n \left\{ \int_{\beta}^{\beta + \frac{1}{n}} F(x) dx - \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{1}{n}} F(x) dx \right\} \leq F(\beta + 0) - F(\alpha + 0). \end{aligned} \quad \square$$

例 2.1 一般には (2.5) における等式は成立しない。例えば $[0, 1]$ 上で *Cantor* の三進関数 F を考えると (左辺) $= 0$, (右辺) $= 1$ となる。ここで、*Cantor* の三進関数 F は次で定義される単調増加な連続関数 F_n の一様収束極限として定義される連続関数である：

$$A_0 = [0, 1], \quad A_{n+1} = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{k}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}, \frac{k}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} \right),$$

$$F_n(x) = \frac{3^n}{2^n} \int_0^x 1_{A_n}(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

尚、 $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ を *Cantor* 集合といい、連続濃度であるが測度が零となっている。

定理 2.4 f を $[a, b]$ 上の非負可積分関数とする。 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ は連続かつほとんど至るところ微分可能で、 $F'(x) = f(x)$ a.e. が成立する。

証明: $x \leq a$ なら $f(x) = f(a)$, $x \geq b$ なら $f(x) = f(b)$ として F を $\mathbb{R}$ 全体で定義しておく。 $F(x)$ が連続であることは Lebesgue の収束定理を用いればよく、また明らかに単調増加だから定理 2.3 よりほとんど至るところ微分可能であるので $F'(x) = f(x)$ a.e., のみを証明すればよい。

(i) f が有界、 $0 \leq f(x) \leq M$ の場合. $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$g_n(x) = n \left(F \left(x + \frac{1}{n} \right) - F(x) \right) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt$$

とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = F'(x)$ a.e., $|g_n(x)| \leq M$ より Lebesgue の有界収束定理を適用し

$$\begin{aligned} \int_a^x F'(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x g_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_x^{x+\frac{1}{n}} - \int_a^{a+\frac{1}{n}} \right) F(t) dt \\ &= F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt. \end{aligned}$$

2 行目の最初の等号は F の連続性を用いた。これより、 $\int_a^x F'(t) dt = \int_a^x f(t) dt$ ($a \leq x \leq b$) となるから $F'(x) = f(x)$ a.e. を得る。

(ii) 一般の場合. 定理 2.3 より

$$\int_{\alpha}^x F'(t) dt \leq F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt. \quad (2.10)$$

逆の不等式を示すため $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq f(x) < n \text{ の時,} \\ 0, & f(x) \geq n \text{ の時,} \end{cases} \quad G_n(x) = \int_a^x (f(t) - f_n(t)) dt$$

と定義する。 $F(x) = G_n(x) + \int_a^x f_n(t) dt$ で f_n は有界だから (i) より

$$F'(x) = G'_n(x) + f_n(x) \geq f_n(x) \text{ a.e.,} \quad n = 1, 2, \dots$$

ここで、不等号には $G'_n \geq 0$ a.e. であることを用いた。 $n \rightarrow \infty$ のとき $f_n(x) \rightarrow f(x)$ より、 $F'(x) \geq f(x)$ a.e. 即ち、

$$\int_a^x F'(t) dt \geq \int_a^x f(t) dt.$$

よって、(2.10) とあわせて $\int_a^x F'(t) dt = \int_a^x f(t) dt$ ($a \leq x \leq b$) となるから $F'(x) = f(x)$ a.e. を得る。 $\square$

問 2.3 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $= 0$ ($x = 0$) とするとき、 $D^\pm f(0)$, $D_\pm f(0)$ を求めよ。

問 2.4 f は $[a, b]$ 上で連続で、 $D^+ f(x) \geq 0$ ($a < x < b$) のとき、 $f(a) \leq f(b)$ を示せ。

2.3 有界変動関数

以下、 $[a, b]$ は有界閉区間、 F は $[a, b]$ 上の右連続な実数値関数とする。

定義 2.2 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ に対して

$$\begin{aligned} V_{F,\Delta}^+ &= \sum_{j=1}^N (F(x_j) - F(x_{j-1}))^+, & V_{F,\Delta}^- &= \sum_{j=1}^N (F(x_j) - F(x_{j-1}))^-, \\ V_{F,\Delta} &= \sum_{j=1}^N |F(x_j) - F(x_{j-1})| = V_{F,\Delta}^+ + V_{F,\Delta}^- \end{aligned}$$

と書く。ただし、 $a \in \mathbb{R}$ に対して $(a)^\pm = \max\{\pm a, 0\}$ とする。 $V_F^+[a, b] = \sup_\Delta V_{F,\Delta}^+$, $V_F^-[a, b] = \sup_\Delta V_{F,\Delta}^-$, $V_F[a, b] = \sup_\Delta V_{F,\Delta}$ をそれぞれ F の $[a, b]$ 上の正変動, 負変動, **全変動** (total variation) という。ここで $\sup$ はすべての $[a, b]$ の分割 Δ に関して取る。 $V_F[a, b] < \infty$ のとき F は $[a, b]$ 上**有界変動** (bounded variation) であるといい、 $[a, b]$ 上の有界変動関数全体を $BV[a, b]$ で表わす。

問 2.5 $\alpha = 1, 2$ のとき、 $F(x) = x^2 \sin(1/x^\alpha)$ ($x \neq 0$), $= 0$ ($x = 0$) が $[-1, 1]$ 上有界変動となるかそれぞれ調べよ。

補題 2.5 (1) $F, G \in BV[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha f + \beta g \in BV[a, b]$.

(2) 単調増加関数 F は有界変動で、 F が単調増加のとき $F(x) - F(a) = V_F^+[a, x]$, F が単調減少のとき $F(x) - F(a) = -V_F^-[a, x]$ である。

(3) F, G が単調増加ならその差 $F - G$ は有界変動となる。

証明: 容易なので演習問題とする。 $\square$

補題 2.6 F が $[a, b]$ 上有界変動なら、次が成立する:

(1) $V_F[a, b] = V_F^+[a, b] + V_F^-[a, b]$.

(2) $F(b) - F(a) = V_F^+[a, b] - V_F^-[a, b]$.

(3) $a < c < b$ に対して $V_F[a, b] = V_F[a, c] + V_F[c, b]$, $V_F^\pm[a, b] = V_F^\pm[a, c] + V_F^\pm[c, b]$.

証明: $c+(c)^- = (c)^+, |c| = c+2(c)^-$ より任意の分割 Δ に対して $F(b)-F(a)+V_{F,\Delta}^- = V_{F,\Delta}^+$, $V_{F,\Delta} = F(b) - F(a) + 2V_{F,\Delta}^-$ となるから、 Δ についての上限を取ることで

$$F(b) - F(a) + V_F^-[a, b] = V_F^+[a, b], \quad V_F[a, b] = F(b) - F(a) + 2V_F^-[a, b] \quad (2.11)$$

を得る。よって、(2), (1)が従う。(3)のために $[a, b]$ の分割 Δ に点 c を加えた出来た $[a, c], [c, b]$ の分割をそれぞれ Δ_1, Δ_2 とすると $V_{F,\Delta_0} = V_{F,\Delta_1} + V_{F,\Delta_2}$. ここで、 Δ_0 は Δ に点 c を加えた出来た $[a, b]$ の分割である。これと、全変動の定義から $V_F[a, b] = V_F[a, c] + V_F[c, b]$ はすぐに従う。正変動、負変動についても同様である。 $\square$

補題 2.7 F は $[a, b]$ 上有界変動、 $a < c < b$ とする。

(1) F が点 c で右連続なら、 $\lim_{u \rightarrow c+0} V_F[u, b] = V_F[c, b]$.

(2) F が点 c で左連続なら、 $\lim_{u \rightarrow c-0} V_F[a, u] = V_F[a, c]$.

証明: (1)のみ示す。任意の $\varepsilon > 0$ をとる。 $[c, b]$ の分割 $\Delta : c = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ を

$$V_{F,\Delta} > V_F[c, b] - \varepsilon/2 \quad (2.12)$$

と選ぶ。 F は c で右連続なので $0 < \delta < t_1 - t_0$ が存在して

$$0 < h < \delta \implies |F(c+h) - F(c)| < \varepsilon/2 \quad (2.13)$$

とできる。このとき、 $t_0 < u < t_0 + \delta$ なる u を Δ に付け加えて得られる $[c, b]$ の分割を Δ_1 , それから t_0 を取り除いて出来る $[u, b]$ の分割を Δ_2 とすると

$$V_{F,\Delta} \leq V_{F,\Delta_1} = V_{F,\Delta_2} + |F(u) - F(t_0)|$$

となるから (2.12), (2.13) と合わせて

$$V_F[c, b] < V_{F,\Delta_2} + \varepsilon \leq V_F[u, b] + \varepsilon.$$

$V_F[c, b] \geq V_F[u, b]$ は明らかに成立するから、以上より

$$c < u < c + \delta \implies |V_F[u, b] - V_F[c, b]| < \varepsilon. \quad \square$$

定理 2.8 $[a, b]$ 上の関数 F が有界変動であるためには単調増加関数 F_1, F_2 によって $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$ と表わせることが必要十分である。特に、 F が点 c で右連続であれば F_1, F_2 はともに c で右連続、 F が点 c で左連続であれば F_1, F_2 は左連続にとれる。

証明: 単調増加関数 F_1, F_2 の差が有界変動であることは補題 2.5 による。逆に関数 F が有界変動であれば補題 2.6 により $F(x) - F(a) = V_F^+[a, x] - V_F^-[a, x]$ であるから $F_1(x) = V_F^+[a, x] - \frac{1}{2}F(a)$, $F_2(x) = V_F^-[a, x] + \frac{1}{2}F(a)$ とすればよい。右(左)連続性は補題 2.6 より

$$F_1(x) = \frac{1}{2}(V_F[a, x] + F(x)) = \frac{1}{2}(V_F[a, b] - V_F[x, b] + F(x))$$

となることを補題 2.7 と合わせれば F_1 についてを得る。これと $F_2 = F_1 - F$ より F_2 についても従う。 $\square$

問 2.6 $f \in BV[a, b]$ なら任意の $c \in (a, b)$ に対して $F(c-0), F(c+0)$ が存在することを示せ。また、 F は高々可算個の点を除いて連続であることを示せ。

2.4 Lebesgue-Stieltjes 測度

ここでは、定理 2.1 の証明の概略を述べ、注意 2.1 の後で述べた (2.1) での f と定理 2.3 での F' が a.e. で一致することを調べる。

このため、実際に測度を構成するために便利な結果を証明なしに紹介し¹¹、その後で定理 2.1 を証明する。

定義 2.3 集合 X の部分集合からなる集合族 $\mathcal{C}$ は、

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}, A, B \in \mathcal{C} \implies A \cap B \in \mathcal{C}$.
 - (2) $A \in \mathcal{C}$ なら A^c は互いに素な有限個の $\mathcal{C}$ の要素の和集合で表わせる
- を満たすとき、 X 上の**半加法族** (semi-algebra) であるという。

命題 2.9 $\mathcal{C} \subset 2^X$ が集合 X の半加法族のとき、 $\mathcal{C}$ を含む最小の有限加法族 $\sigma_0(\mathcal{C})$ の元は互いに素な有限個の $\mathcal{C}$ の要素の和集合からなる。

定理 2.10 集合 X 上の半加法族 $\mathcal{C}$ に対し、 $\mu_0 : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ が $\mu_0(\emptyset) = 0$ と条件

- (1) $C = \sum_{j=1}^n C_j \in \mathcal{C}, C_j \in \mathcal{C} (j = 1, \dots, n) \implies \mu_0(C) = \sum_{j=1}^n \mu_0(C_j)$.
 - (2) $C = \sum_{j=1}^\infty C_j \in \mathcal{C}, C_j \in \mathcal{C} (j \in \mathbb{N}) \implies \mu_0(C) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu_0(C_j)$.
- を満たすとき、 $\mathcal{C}$ 上の前測度 (pre-measure) と呼ばれる。 $\mathcal{C}$ 上の前測度 (pre-measure) は $\sigma_0(\mathcal{C})$ 上の測度に一意的に拡張できる。

これを E.Hopf の拡張定理と組み合わせることで次が得られる。

定理 2.11 $\mathcal{C} \subset 2^X$ を X 上の半加法族, $\mu_0 : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ を前測度とする。もし、 μ_0 が σ -有限、即ち、 $\mu_0(X_j) < \infty$ なる $X_j \in \mathcal{C}$ で $X = \sum_{j=1}^\infty X_j$ と表わせるとき、 μ_0 は $\mathcal{C}$ を含む最小の σ -加法族 $\sigma(\mathcal{C})$ を含むある σ -加法族上の (完備な) 測度 μ に一意的に拡張される。特に、

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \mu_0(C_j) ; E \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j, C_j \in \mathcal{C}, j \in \mathbb{N} \right\}, \quad E \in \sigma(\mathcal{C})$$

となる。

定理 2.1 の証明: $\mathcal{C}$ を半開区間 $(c, d] \cap (a, b] (a \leq c < d \leq b)$ の全体とすると、 $\mathcal{C}$ は $\mathbb{R}$ 上の半加法族となる。このとき、 $\mu_0((c, d]) = F(d) - F(c)$ によって定まる $\mu_0 : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ は明らかに σ -有限だから定理 2.10 の条件 (i), (ii) を満たすことを示せばよい。(i) は明らかだから (ii) を示す。つまり、 $(c, d] = \sum_{j=1}^\infty (c_j, d_j]$ のとき

$$F(d) - F(c) \leq \sum_{j=1}^\infty (F(d_j) - F(c_j)) \quad (2.14)$$

を示す。 $-\infty < c < d < \infty$ のとき。任意の $\varepsilon > 0$ をとる。 F の右連続性を用いて、 $\delta, \delta_j > 0 (j \in \mathbb{N})$ を

$$F(c + \delta) < F(c) + \varepsilon/2, \quad F(d_j + \delta_j) < F(d_j) + \varepsilon/2^{j+1} \quad (j \in \mathbb{N}) \quad (2.15)$$

¹¹証明は谷島著 [Y] または R. Durrett: Probability, Theory and Examples, 2nd ed. Duxbury Press の Appendix を参照のこと。Durrett の本は確率論の入門書として名著でありその Appendix には測度論がコンパクトにまとめられている。

と選ぶことができる。このとき、 $[c + \delta, d] \subset \cup_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j + \delta_j)$. よって、Heine-Borel の被覆定理より有限個の区間を選んで $[c + \delta, d] \subset \cup_{j=1}^N (c_j, d_j + \delta_j)$ とでき、

$$\begin{aligned} F(d) - F(c) - \varepsilon/2 &\leq F(d) - F(c + \delta) \\ &\leq \sum_{j=1}^N (F(d_j + \delta_j) - F(c_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (F(d_j) - F(c_j)) + \varepsilon/2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\varepsilon > 0$ は任意より (2.14) を得る。 $-\infty = (b =) c < d < \infty$ のとき。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $F(c) = -\infty, > -\infty$ に応じて $c_0 \in \mathbb{R}$ を $F(c_0) > -1/\varepsilon$, $F(c_0) < F(c) + \varepsilon/2$ と、 $\delta_j > 0$ ($j \in \mathbb{N}$) を (2.15) ととれば、 $[c_0, d] \subset \cup_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j + \delta_j)$. Heine-Borel の被覆定理より有限個の区間を選んで $[c_0, d] \subset \cup_{j=1}^N (c_j, d_j + \delta_j)$ とでき、 $F(c) = -\infty$ の場合は (2.16) と同様に

$$F(d) + 1/\varepsilon \leq F(d) - F(c_0) \leq \sum_{j=1}^N (F(d_j + \delta_j) - F(c_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (F(d_j) - F(c_j)) + \varepsilon/2.$$

$\varepsilon > 0$ は任意より (2.14) の左辺は ∞ となり、(2.14) が示されたことになる。他の場合は演習問題とする。 $\square$

問 2.7 (Kolmogorov の拡張定理) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上の確率測度 μ_n が**整合的** (*consistent*) であるとする:

$$\mu_{n+1}((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n] \times \mathbb{R}) = \mu_n((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]) \quad (-\infty < a_i < b_i < \infty).$$

このとき、 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ 上の確率測度 P が唯一つ存在して

$$P(\{\omega = (\omega_j); \omega_j \in (a_j, b_j], 1 \leq j \leq n\}) = \mu_n((a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n])$$

とできることを示せ。ただし、 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は直積位相を入れるものとする。

系 2.12 関数 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) が右連続かつ有界変動とする。このとき、 $\mathcal{B}_{[a,b]} = \{(a, b] \cap B; B \in \mathcal{B}^1\}$ 上の符号付測度 ν_F が存在して

$$\nu_F((s, t]) = F(t) - F(s) \quad a \leq s < t \leq b$$

を満たす。

証明: 定理 2.8 により $F = F_1 - F_2$ と右連続かつ単調増加な関数の差として表わせる。よって、定理 2.1 より定まる Lebesgue-Stieltjes 測度 μ_{F_1}, μ_{F_2} を用いて $\nu_F = \mu_{F_1} - \mu_{F_2}$ とおけば、これが求める符号付速度であることがわかる。 $\square$

多少天下りの的ではあるが、関数 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して次のような定義を与える。

定義 2.4 (1) 関数 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、有限個の互いに素な区間 $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$ が

$$\sum_{j=1}^n |y_j - x_j| < \delta \text{ をみたす時にはつねに } \sum_{j=1}^n |F(y_j) - F(x_j)| < \varepsilon \quad (2.17)$$

をみたすとき $[a, b]$ 上**絶対連続** (*absolutely continuous*) という。

(2) 関数 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が有界変動でその微分がほとんど至るところ 0 に等しい有界変動関数を**特異関数**という。連続な特異関数を**特異連続関数**という。

補題 2.13 関数 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が絶対連続ならば有界変動となる。

証明: $\varepsilon = 1$ に対して (2.17) が成り立つ δ_1 を一つとって固定し、分割 $\Delta_0 : a = y_0 < y_1 < \dots < y_N = b$ を $\max_j (y_j - y_{j-1}) < \delta_1$ となるように選ぶ。このとき、 Δ_0 の任意の細分割 $\Delta_1 : a = x_0 < x_1 < \dots < x_M = b$ に対して

$$V_{F, \Delta_1} = \sum_{j=1}^N \sum_{[x_{k-1}, x_k] \subset [y_{j-1}, y_j]} |F(x_k) - F(x_{k-1})|$$

であるが、 $\sum_{[x_{k-1}, x_k] \subset [y_{j-1}, y_j]} |x_k - x_{k-1}| = |y_j - y_{j-1}| < \delta_1$ より $V_{F, \Delta_1} < N$ 。今、任意の分割 Δ に対して Δ と Δ_0 を合わせた分割 $\Delta \cup \Delta_0$ は Δ_0 の細分であるから $V_{F, \Delta} \leq V_{F, \Delta \cup \Delta_0} < N$ となるので $V_F[a, b] \leq N$ を得る。 $\square$

補題 2.14 F_1, F_2 が絶対連続ならば $F = F_1 - F_2$ も絶対連続である。逆に、関数 F が絶対連続連続であれば定理 2.8 による右連続かつ単調増加な関数の分解 $F = F_1 - F_2$ を F_1, F_2 がともに絶対連続にとれる。

証明: 演習問題とする。 $\square$

定理 2.15 関数 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は有界変動かつ右連続とし、対応する *Lebesgue-Stieltjes* 測度を ν_F する。また、 m は 1 次元 *Lebesgue* 測度を表わすとする。このとき、

- (1) F が特異であるための必要十分条件は ν_F と m が特異であることである。
- (2) F が絶対連続であるための必要十分条件は ν_F が m に絶対連続であることである。

証明: (1), (2) ともに F は単調増加として一般性を失わないことに注意する。定理 2.1, 系 2.12 の記号に従って $\mu_F = \nu_F$ とかく。

(1) (十分性) 定理 2.3 より $\int_{\alpha}^{\beta} F'(x) dx \leq F(\beta) - F(\alpha) = \mu_F((\alpha, \beta])$ より任意の $A \in \mathcal{B}_{(a, b]}$ に対して $0 \leq \int_A F'(x) dx \leq \mu_F(A)$ 。 μ_F と m が特異とすると、 $E \in \mathcal{B}_{(a, b]}$ が存在して $m(E^c) = \mu_F(E) = 0$ 。これより $A \subset E^c$ なら $m(A) = 0$ より $\int_A F'(x) dx = 0$ 。一方 $A \subset E$ ならば $\int_A F'(x) dx \leq \mu_F(A) = 0$ 。従って任意の $A \in \mathcal{B}_{(a, b]}$ に対して $\int_A F'(x) dx = 0$ となり $F' = 0$ a.e. を得る。

(必要性) 定理 1.9 (*Lebesgue* 分解) を μ_F に適応すると次のように分解できる:

$$\mu_F(A) = \int_A \varphi dm + \mu_{F, s}(A), \quad A \in \mathcal{B}_{(a, b]}, \quad \varphi \in L^1(m), \quad \mu_{F, s} \perp m.$$

$F_s(x) = \mu_{F, s}((a, x])$ とおくと、 $F(x) - F(a) = \int_a^x \varphi dm + F_s(x)$ 。定理 2.3 と定理 2.4 を用い両辺を微分すると (十分性) より $F'_s(x) = 0$ a.e. であるから、 $F'(x) = \varphi(x)$ a.e. ここで、もし F が特異であれば $\varphi(x) = F'(x) = 0$ a.e. となるから、 $\mu_F = \mu_{F, s}$ 。即ち、 μ_F と m は特異である。

(2) (必要性) 仮定より任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して、有限個の互いに素な区間 $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$ が (2.17) を満たすようにできる。今 $m(A) = 0$ であれば可算無限個の互いに素な区間 $I_k = (x_k, y_k]$ ($k \in \mathbb{N}$) を $A \subset \sum_{k=1}^{\infty} I_k$ かつ $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \delta$ とできる。このとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\sum_{k=1}^n |I_k| < \delta$ より $\mu_F(\sum_{k=1}^n I_k) = \sum_{k=1}^n |F(y_k) - F(x_k)| < \varepsilon$ とできるから、 $\mu_F(A) \leq \mu_F(\sum_{k=1}^{\infty} I_k) \leq \varepsilon$ 。 $\varepsilon > 0$ は任意だったから、 $\varepsilon \downarrow 0$ として $\mu_F(A) = 0$ を得る。

(十分性) 次の補題 2.16 で $A = \sum_{k=1}^n (x_k, y_k]$ をとればよい。 $\square$

補題 2.16 μ, ν を可測空間 $(X, \mathcal{A})$ 上の測度とすると $\nu \ll \mu$ であるための必要十分条件は、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta$ ならば $\nu(A) < \varepsilon$ となることである。

証明: 十分性は明らかであろう。背理法により必要性を示す。ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して各 $n \in \mathbb{N}$ で $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}, \nu(A_n) \geq \varepsilon_0$ なる $A_n \in \mathcal{A}$ が存在すると仮定する。このとき、 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ とおくと $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ であるから Borel-Cantelli の補題 (cf. 例えば [I] p.35) より $\mu(A) = 0$ 。一方、各 $n \in \mathbb{N}$ で $\nu(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \geq \nu(A_n) \geq \varepsilon_0$ であるから $\nu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \geq \varepsilon_0$ 。これは $\nu \ll \mu$ であることに矛盾する。 $\square$

定理 2.15 と補題 1.5 (3), 定理 1.6 (Radon-Nikodym), 定理 1.9 (Lebesgue 分解) をそれぞれ対応させることにより次を得る。証明は略す。¹²

補題 2.17 有界変動関数 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が絶対連続かつ特異ならば F は定数 (関数) である。

定理 2.18 関数 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が絶対連続であることと、 $[a, b]$ 上の可積分な φ が存在して

$$F(x) = F(a) + \int_a^x \varphi(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

となることは必要十分条件である。このとき、特に $F' = \varphi$ a.e. である。

定理 2.19 関数 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は有界変動とする。このとき、絶対連続な関数 F_a と特異な関数 F_s が存在して $F(x) = F_a(x) + F_s(x)$ と分解される。この分解は定数を除いて一意である。

注意 2.3 定理 2.19 で特異部分 F_s を更に特異連続な関数 F_{sc} と不連続な点でのみ変化する関数 F_d の和に分解することもできる。実際、 $D = \{x \in [a, b]; \nu_F(\{x\}) \neq 0\}$ ととり $F_d(x) = \nu_F((a, x] \cap D)$, $F_{sc}(x) = F_s(x) - F_d(x)$ すればよい。

問 2.8 (すべての点で微分不可能な関数の例¹³) $x \in \mathbb{R}$ に対し $g(x) = \min\{x - [x], 1 - (x - [x])\}$, ($[x]$ は x の整数部分), $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} g(4^n x)$ とおく。このとき、次を示せ。

(i) f は $\forall x \in \mathbb{R}$ で連続, (ii) f は $\forall x \in \mathbb{R}$ で微分不可能。

Hint: (ii) $g_n(x) = 4^{-n} g(4^n x)$, また $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\delta_k(x) = \begin{cases} 4^{-k-1}, & \text{if } x \in \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2m}{4^{k+1}}, \frac{2m+1}{4^{k+1}} \right), \\ -4^{-k-1}, & \text{if } x \in \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2m-1}{4^{k+1}}, \frac{2m}{4^{k+1}} \right), \end{cases}$$

とおく。このとき、 $|g_n(x + \delta_k(x)) - g_n(x)|$ の値は、 $n \leq k, n > k$ に応じて各々 $4^{-k-1}, 0$ となることを示し、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x + \delta_k(x)) - f(x)}{\delta_k(x)}$ が存在しないことを調べよ。

問 2.9 (a, b) において F は連続かつ有界変動、 φ は有界変動とする。次を示せ。

$$\int_a^b \varphi(x) dF(x) = F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - \int_a^b F(x) d\varphi(x).$$

¹²これらの定理は Lebesgue-Stieltjes 測度や Radon-Nikodym の定理とは独立に証明可能である (cf. [Y])。

¹³吉田伸生氏による測度論の講義ノートにある例。この講義ではこの講義録を多く参考にしてしている。次の URL から入手できます。 <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nobuo/>

3 関数空間

3.1 L^p -空間

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とする。

定義 3.1 $p \in [1, \infty]$ とする。 X 上の $\mathcal{A}$ -可測な複素数値関数 f で $\|f\|_p < \infty$ なるもの全体を $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ あるいは単に $L^p(\mu)$ で表す；

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup } |f| \equiv \inf \{ \lambda > 0; |f| \leq \lambda, \mu\text{-a.e.} \}, & p = \infty. \end{cases} \quad (3.1)$$

ここで、 $f = g$ μ -a.e. のとき f と g は同じ関数と考えることにする。

$X \subset \mathbb{R}^d$ が Lebesgue 可測集合、 μ_d を $\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度とすると、 $L^p(X, \mathcal{L}_X^d, \mu)$ を $L^p(X)$ と略記する。ただし $\mathcal{L}^d$ は Lebesgue 可測集合族、 $\mathcal{L}_X^d = \{A \in \mathcal{L}^d; A \subset X\}$ を表す。

X を高々可算集合、 μ を X 上の個数測度 (cf. p.9 脚注) とすると、 $L^p(X, 2^X, \mu)$ を $\ell^p(X)$ と記す。 $\ell^p(X)$ は数列空間と呼ぶことが多い。

この節では $L^p(\mu)$ が Banach 空間 (cf. 定義 3.2) であることを証明する。

定義 3.2 (1) 線形空間 V があって、その元 $f \in V$ に対し $\|f\|$ で表される実数が対応し、

(i) $\|f\| \geq 0$, $f = 0$ のときかつそのときに限り $\|f\| = 0$;

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ ($\alpha \in \mathbb{C}$);

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

を満たすとき、 $\|f\|$ を $f \in V$ の **ノルム** (norm) といい、ノルムの定義された線形空間 $(V, \|\cdot\|)$ を **ノルム空間** という。ノルム空間の元 f, g に対して $d(f, g) = \|f - g\|$ とおくと $d(f, g)$ は距離の公理を満たす。そこで $(V, \|\cdot\|)$ をこのノルムから誘導される距離に関する距離空間と見なす。

(2) ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ の点列 $\{f_n\}$ と $f \in V$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ となるとき $\{f_n\}$ は f に (強) 収束するといい、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ in V もしくは $f_n \rightarrow f$ in V 等と表す。(空間 V が明らかなき場合は “in V ” を略すこともある。)

(3) ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ が距離空間として完備であるとき、即ち、任意の Cauchy 列 $\{f_n\} \subset V : \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\| = 0$ に対して $f \in V$ が存在して $f_n \rightarrow f$ in V となるとき、**Banach 空間** であるという。

例 3.1 (1) $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$ ($1 \leq p < \infty$), $\|x\|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} |x_k|$ と定める。すべての $1 \leq p \leq \infty$ に対して $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ は Banach 空間となる。この場合 $\|\cdot\|_p$ から入る位相は p によらず同値となる (cf. 問題 3.1)。

(2) $V = C([a, b]; \mathbb{C})$: $[a, b]$ 上の複素数値連続関数全体とする。ここでは $X = [a, b]$, μ をその上の Lebesgue 測度とし (3.1) のノルムを考える。このとき $(V, \|\cdot\|_1)$, $(V, \|\cdot\|_\infty)$ はともにノルム空間になるが Banach 空間となるのは後者のみである。

問 3.1 線形空間 V 上の 2 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|$ について、定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在してすべての $u \in V$ に対して不等式

$$C_1 \|u\| \leq \|\cdot\| \leq C_2 \|u\|$$

が成立するとき、ノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|$ は**同値**であるという。 X 上のノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|$ について次の (a), (b) が同値である事を示せ。

(a) 定数 $C > 0$ が存在して、 $\|u\| \leq C\|u\|$ ($\forall u \in V$),

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 0$ となる任意の点列 $\{u_n\} \subset V$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 0$.

次の補題より $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ がノルム空間になることがわかる。

命題 3.1 $p, q \in [1, \infty], \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とし f, g は可測とする。このとき以下が成立する。

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (\text{Hölder の不等式}) \quad (3.2)$$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (\text{三角不等式, Minkowski の不等式ともいう}) \quad (3.3)$$

証明: (3.2): $(p, q) = (1, \infty)$ の場合は $\lambda > \|f\|_\infty$ なら $\lambda > |f|$, μ -a.e. より

$$\|fg\|_1 \leq \|\lambda g\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$$

となるから、 $\lambda \downarrow \|f\|_\infty$ とすればよい。 $(p, q) = (\infty, 1)$ の場合も同様。

$1 < p, q < \infty$ のとき、任意の $s, t \geq 0$ に対し

$$st \leq \frac{1}{p}s^p + \frac{1}{q}t^q, \quad \text{等号成立} \iff s^p = t^q \quad (3.4)$$

であることに注意する。(証明は容易なので略す。) $C = \|f\|_p \|g\|_q$ とする。 $C = \infty$ なら (3.2) は自明。 $C = 0$ なら $f = 0$, μ -a.e., または $g = 0$, μ -a.e. であるからこの場合も (3.2) の両辺 = 0. $C \in (0, \infty)$ のとき、(3.4) で $s = |f(x)|/\|f\|_p, t = |g(x)|/\|g\|_q$ とし両辺を μ で積分すると

$$C^{-1} \int_X |fg| d\mu \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int_X |g|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

だから両辺に C を乗じて (3.2) を得る。

(3.3): $p = 1$ のとき $|f + g| \leq |f| + |g|$ の両辺を積分すればよい。

$p = \infty$ のとき $\lambda_1 \geq |f|, \lambda_2 \geq |g|$, μ -a.e. とすると $|f + g| \leq \lambda_1 + \lambda_2$, μ -a.e. より $\|f + g\|_\infty \leq \lambda_1 + \lambda_2$. よって $\lambda_1 \downarrow \|f\|_\infty, \lambda_2 \downarrow \|g\|_\infty$ とすればよい。

$1 < p < \infty$ のとき $\|f\|_p + \|g\|_p = \infty$ なら自明だから $< \infty$ としてよい。任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対し $|s + t|^p \leq 2^{p-1}(|s|^p + |t|^p)$ であることに注意する (証明は容易) と、 $h = f + g$ に対し

$$\|h\|_p^p = \int_X |h|^p d\mu \leq 2^{p-1} \left(\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu \right) < \infty$$

を得る。今、Hölder の不等式を用いると

$$\begin{aligned} \|h\|_p^p &= \int_X |h|^p d\mu \leq \int_X |h|^{p-1} |f| d\mu + \int_X |h|^{p-1} |g| d\mu \\ &\leq \|h\|_q^{p-1} \|f\|_p + \|h\|_q^{p-1} \|g\|_p = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|h\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

となるので両辺を $\|h\|_p^{p-1}$ で割れば主張を得る。 $\|h\|_q^{p-1} = \|h\|_p^{p-1}$ の変形は $q(p-1) = p$ よりノルムの定義 (3.1) からすぐに従う。 $\square$

定理 3.2 $L^p(\mu)$ はノルム $\|\cdot\|_p$ に関して完備である (従って *Banach* 空間である)。

補題 3.3 $p \in [1, \infty]$, $\{f_n\} \subset L^p(\mu)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$ なら $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$, μ -a.e. かつ

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p. \quad (3.5)$$

証明: $p = \infty$ のときは容易なので略す。 $p < \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right\|_p &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^l |f_n| \right\|_p \quad (\text{単調収束定理より}) \\ &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^l \|f_n\|_p \quad (\text{三角不等式より}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty. \end{aligned}$$

従って $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$, μ -a.e. よって $|\sum_{n=1}^{\infty} f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ とあわせて (3.5) を得る。

□

定理 3.2 の証明: $\{f_n\} \subset L^p(\mu)$ を Cauchy 列とする。このとき、部分列 $\{f_{n(k)}\}_{k \geq 1}$ をとり $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n(k)} - f\|_p = 0$ なる $f \in L^p(\mu)$ の存在を証明すれば

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p \leq \lim_{n, k \rightarrow \infty} \|f_n - f_{n(k)}\|_p + \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n(k)} - f\|_p = 0$$

となり証明は完了する。

部分列 $\{f_{n(k)}\}_{k \geq 1}$ を次を満たすように選ぶ:

$$\|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\|_p \leq 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

特に、 $\sum_{l=1}^{\infty} \|f_{n(l+1)} - f_{n(l)}\|_p < \infty$ であるから、補題 3.3 より

$$f = f_{n(1)} + \sum_{l=1}^{\infty} (f_{n(l+1)} - f_{n(l)})$$

とすると右辺は μ -a.e. で絶対収束し $f \in L^p(\mu)$ となる。このとき、

$$f - f_{n(k)} = \sum_{l=k}^{\infty} (f_{n(l+1)} - f_{n(l)})$$

に対して補題 3.3 を用いると

$$\|f - f_{n(k)}\|_p \leq \sum_{l=k}^{\infty} \|f_{n(l+1)} - f_{n(l)}\|_p \leq \sum_{l=k}^{\infty} 2^{-l} \rightarrow 0, \quad \text{as } k \rightarrow \infty. \quad \square$$

上記証明で $F = |f_{n(1)}| + \sum_{l=1}^{\infty} |f_{n(l+1)} - f_{n(l)}|$ とおくことで次の系を得る。

系 3.4 $f_n, f \in L^p(\mu)$ ($n \in \mathbb{N}$) が $f_n \rightarrow f$ in $L^p(\mu)$ を満たすとする。このとき、部分列 $\{f_{n(k)}\} \subset \{f_n\}$ と $F \in L^p(\mu)$ で次の (a), (b) を満たすものが存在する。

(a) 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $|f_{n(k)}| \leq F$, μ -a.e.

(b) $k \rightarrow \infty$ のとき、 μ -a.e. で $f_{n(k)} \rightarrow f$.

問 3.2 $1 \leq p < q \leq \infty$ とする。

- (1) $\mu(X) < \infty$ ならば $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ を示せ。 (Hint: Hölder の不等式を用いよ。)
- (2) $f \in L^p([0, 1])$ かつ $f \notin L^q([0, 1])$ なる f を例示せよ。
- (3) $L^p(\mathbb{R})$ と $L^q(\mathbb{R})$ の間に包含関係がないことを示せ
- (4) 任意の $r \in (p, q)$ に対して $\theta \in (0, 1)$ が存在し $\forall f \in L^r(\mu)$ に対して $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$ とできることを示せ。これより、 $\bigcap_{p \leq s \leq q} L^s(\mu) = L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ となる。

問 3.3 $\mu(X) < \infty$ ならば可測関数 f に対し $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ を示せ。

3.2 Euclid 空間上の関数空間

この節では特に断らない限り、測度空間として $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d, \mu_d)$ を考える。ここで、 μ_d は Lebesgue 測度を、 $\mathcal{L}^d$ は Lebesgue 可測集合族、即ち、Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ を Lebesgue 測度で完備化したもの、を表す。また、Lebesgue 測度に関する積分を単に $\int \cdots dx$ で表し、積分範囲が $\mathbb{R}^d$ のときはそれを省略する。

定義 3.3 $\mathbb{R}^d$ 上の複素数値関数 f に対して、集合 $\{x; f(x) \neq 0\}$ の閉包を f の **台** (support) といい、 $\text{supp } f$ で表す。

以下、 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とする。次の記号を導入する：

$C(\Omega)$: Ω 上の連続関数全体。

$C_0(\Omega)$: Ω 上の連続関数 f で $\text{supp } f \subset \Omega$ かつ compact であるものの全体。

$C^k(\Omega)$: Ω 上の k 回連続微分可能な関数全体。

$C_0^k(\Omega)$: Ω 上の k 回連続微分可能な関数 f で $\text{supp } f \subset \Omega$ かつ compact であるものの全体。

ここで、特に断らない限り関数は複素数値であるとする。

定理 3.5 $1 \leq p < \infty$ のとき、 $C_0(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ で稠密である, i.e.,

$$\forall f \in L^p(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in C_0(\Omega) \text{ such that } \|f - g\|_p < \varepsilon.$$

この証明には Lebesgue 測度の正則性が重要となる。そのため証明なしに主張を述べる。

定理 (正則性, cf. [I] p.37)

- (1) $A \in \mathcal{L}^d$ ならば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $G \supset A, \mu_d(G \setminus A) < \varepsilon$ なる開集合 G が存在する。
- (2) $A \in \mathcal{L}^d$ ならば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $F \subset A, \mu_d(A \setminus F) < \varepsilon$ なる閉集合 F が存在する。特に、 $\mu_d(A) < \infty$ であれば F として compact 集合がとれる。

定理 3.5 の証明: 任意の $\varepsilon > 0$ と $f \in L^p(\Omega)$ をとっておく。有界な開集合の列 $\{\Omega_n\}$ を次を満たすようにとる。

$$\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega.$$

例えば $\Omega_n = \{x \in \Omega; |x| < n, \text{dist}(x, \Omega^c) < 1/n\}$ とすればよい。ただし $\text{dist}(x, \Omega^c) = \inf_{y \in \Omega^c} |x - y|$ とする。このとき $f_n(x) = f(x)1_{\Omega_n}(x)$ とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ かつ

$|f_n(x) - f(x)|^p \leq 2^{p-1}(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p) \leq 2^p |f(x)|^p$ より Lebesgue の優収束定理により $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$. これより $\|f_N - f\|_p < \varepsilon/3$ なる $N \in \mathbb{N}$ をとれる。

この f_N に対して単関数 $\varphi(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j 1_{A_j}(x)$, $\alpha_j \neq 0, A_j \in \mathcal{L}^d : A_j \subset \Omega_N$ を $\|f_N - \varphi\|_p < \varepsilon/3$ と選ぶ。次に Lebesgue 測度の正則性より compact 集合 K_j , 開集合 G_j を

$$K_j \subset A_j \subset G_j \subset \Omega_N; \quad \mu_d(G_j \setminus K_j) < (\varepsilon/(6k|\alpha_j|))^p$$

を満たすようにとる (Ω_N も開集合であることに注意)。このとき、

$$\rho_j(x) = \frac{\text{dist}(x, G_j^c)}{\text{dist}(x, G_j^c) + \text{dist}(x, K_j)}$$

とおくと $1_{K_j} \leq \rho_j \leq 1_{G_j}$ かつ $\rho_j \in C_0(\Omega)$ で

$$\|1_{A_j} - \rho_j\|_p \leq \|2(1_{G_j} - 1_{K_j})\|_p = 2\mu_d(G_j \setminus K_j)^{1/p} < \varepsilon/(3k|\alpha_j|).$$

よって $g = \sum_{j=1}^k \alpha_j \rho_j$ とおくと $g \in C_0(\Omega)$ であり

$$\|\varphi - g\|_p \leq \sum_{j=1}^k |\alpha_j| \|1_{A_j} - \rho_j\|_p < \varepsilon/3$$

から $\|f - g\|_p \leq \|f - f_N\|_p + \|f_N - \varphi\|_p + \|\varphi - g\|_p < \varepsilon$. $\square$

注意 3.1 $C_0(\Omega)$ は $L^\infty(\Omega)$ で稠密ではない。実際、 $f(x) \equiv 1$ に対し $\|f - \varphi\| \geq 1$ ($\forall \varphi \in C_0(\Omega)$) となる。 Ω がコンパクト集合であっても $C(\Omega)$ は $L^\infty(\Omega)$ で稠密ではない。 $C(\Omega)$ は $L^\infty(\Omega)$ の (真) 閉部分空間となっている。

問 3.4 関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対し $(f * \delta_y)(x) = f(x - y)$ とおく。このとき $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対して次を示せ:

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \|f * \delta_y - f\|_p = 0.$$

Hint: $\forall \varepsilon > 0$ をとっておく。定理 3.5 より $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ を $\|\varphi - f\|_p < \varepsilon/3$ と選べる。Lebesgue 測度の平行移動不変性より $\|\varphi * \delta_y - f * \delta_y\|_p = \|\varphi - f\|_p < \varepsilon/3$ であるから $\lim_{|y| \rightarrow 0} \|\varphi * \delta_y - \varphi\|_p = 0$ を示せば証明は完了する。

命題 3.6 $f \in L^1(\mathbb{R}^d), g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ($1 \leq p \leq \infty$) とする。このとき、

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y) dy \quad (3.6)$$

が a.e.x で定義され、 $x \mapsto f * g(x)$ は $\mathcal{L}^d$ -可測。 $f * g$ を f と g の **合成積** または **畳み込み** (convolution) と呼ぶ。更に以下が成立する:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p. \quad (\text{Young の不等式}) \quad (3.7)$$

$$f * g = g * f. \quad (3.8)$$

この証明には Fubini の定理が重要となる。そのため証明なしに主張のみ述べておく。

定理 (Fubini, cf. [I] p.102) $(X, \mathcal{M}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y)$ を完備で σ -有限な測度空間とし、その直積測度空間を完備化したものを $(Z, \mathcal{M}, \mu)$ とする。このとき

- (1) $f(z) = f(x, y)$ が $\mathcal{M}$ -可測で μ -a.e. で $f \geq 0$ ならば
 - (a) μ_X -a.e. $x \in X$ に対して $f(x, y)$ は y の関数として $\mathcal{M}_Y$ -可測であり、
 μ_Y -a.e. $y \in Y$ に対して $f(x, y)$ は x の関数として $\mathcal{M}_X$ -可測である。
 - (b) $\int_Y f(x, y) d\mu_Y(y)$ は x の関数として $\mathcal{M}_X$ -可測であり、
 $\int_X f(x, y) d\mu_X(x)$ は y の関数として $\mathcal{M}_Y$ -可測である。
 - (c) $\int_Y d\mu_Y(y) \int_X f(x, y) d\mu_X(x) = \int_X d\mu_X(x) \int_Y f(x, y) d\mu_Y(y) = \int_Z f(z) d\mu(z)$.
- (2) $f(z) = f(x, y)$ が Z 上の複素数値 $\mathcal{M}$ -可測関数であって、 μ -可積分ならば
 - (a) μ_X -a.e. $x \in X$ に対して $f(x, y)$ は y の関数として Y 上で μ_Y -可積分であり、
 μ_Y -a.e. $y \in Y$ に対して $f(x, y)$ は x の関数として X 上で μ_X -可積分である。
 - (b) $\int_Y f(x, y) d\mu_Y(y)$ は x の関数として X 上で μ_X -可積分であり、
 $\int_X f(x, y) d\mu_X(x)$ は y の関数として Y 上で μ_Y -可積分である。
 - (c) $\int_Y d\mu_Y(y) \int_X f(x, y) d\mu_X(x) = \int_X d\mu_X(x) \int_Y f(x, y) d\mu_Y(y) = \int_Z f(z) d\mu(z)$.

命題 3.6 の証明を開始する前に Fubini の定理の応用である次の補題を準備する。

補題 3.7 f が $\mathcal{L}^d$ -可測のとき、 $(x, y) \mapsto f(x - y)$ は $\mathcal{L}^{2d}$ -可測となる¹⁴。

証明: $f \geq 0$ のときを証明すればよい。Lebesgue 可測関数の性質より Borel 可測関数 g, h が存在して

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{かつ} \quad g(x) = f(x) = h(x) \text{ a.e.}$$

とできる (cf. [I] 定理 11.1)。このとき、 $\mathbb{R}^{2d}$ 上で $g(x - y) \leq f(x - y) \leq h(x - y)$ であって、 $g(x - y), h(x - y)$ は Borel 可測であるから

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} |h(x - y) - g(x - y)| dx dy &= \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^d} |h(x - y) - g(x - y)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^d} |h(x) - g(x)| dx = 0. \end{aligned}$$

ここで、第 1 の等号は Fubini の定理 (1c) を第 2 の等号は Lebesgue 測度の平行移動不変性 (cf. [I] 定理 12.7) を用いた。従って、 μ_{2d} -a.e. (x, y) に対して $g(x - y) = f(x - y) = h(x - y)$ となるから $f(x - y)$ は $\mathcal{L}^{2d}$ -可測である。 $\square$

命題 3.6 の証明: (i) $f \geq 0, g \geq 0$ のとき: 補題 3.7 より $f(x - y)g(y)$ は $\mathcal{L}^{2d}$ -可測であるから、Fubini の定理 (1b) により $f * g(x)$ は a.e. x に対して定義され $\mathcal{L}^d$ -可測である。

¹⁴ $y = f(x), z = g(y)$ がともに Borel 可測のとき合成関数 $z = g(f(x))$ も Borel 可測になることは容易に示せる。また $y = f(x)$ が Lebesgue 可測のときも合成関数 $z = g(f(x))$ は Lebesgue 可測になることも容易にわかる。しかし、 $y = f(x)$ が例え連続であっても $z = g(y)$ が Lebesgue 可測の場合 $z = g(f(x))$ は一般には Lebesgue 可測にはならない (cf. [I] p.73)。

$p = \infty$ のときは $\lambda > \|g\|_\infty$ とすると $\lambda f(x-y) > f(x-y)g(y) \geq 0$, a.e. y より

$$\int f(x-y)g(y) dy \leq \lambda \int f(x-y) dy = \lambda \int f(y) dy.$$

最後の等号は Lebesgue 測度の合同変換不変性を用いた。これより $\|f * g\|_\infty \leq \lambda \|f\|_1$ を得るので、 $\lambda \downarrow \|g\|_\infty$ として (3.7) を得る。

$p < \infty$ のとき $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ なる q をとる。 $f * g(x)$ が定義される x に対して

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int f(x-y)g(y) dy = \int f(x-y)^{1/q} f(x-y)^{1/p} g(y) dy \\ &\leq \left(\int f(x-y) dy \right)^{1/q} \left(\int f(x-y)g(y)^p dy \right)^{1/p} ; \text{Hölder の不等式} \\ &= \|f\|_1^{1/q} \left(\int f(x-y)g(y)^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

上式の両辺を p 乗して積分すると

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p^p &= \|f\|_1^{p/q} \int dx \int f(x-y)g(y)^p dy \\ &= \|f\|_1^{p/q} \int g(y)^p dy \int f(x-y) dx ; \text{Fubini の定理 (1c) より} \\ &= \|f\|_1^{p/q} \|g\|_p^p \|f\|_1 = (\|f\|_1 \|g\|_p)^p. \end{aligned}$$

(3.8) は $f * g(x)$ が定義される x に対し合同変換 $y \mapsto x-y$ による不変性から

$$\int f(x-y)g(y) dy = \int f(y)g(x-y) dy.$$

(ii) f, g が一般の複素数値のとき: (i) の結果を $|f|, |g|$ に対して用いると $\| |f| * |g| \|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p < \infty$. 従って $|f| * |g|(x) < \infty$, a.e. x . これから Fubini の定理 (2b) により $f * g(x)$ は a.e. x に対して定義され、 $\mathcal{L}^d$ -可測である。(3.7) は $|f * g(x)| \leq |f| * |g|(x)$ より (i) に帰着される。(3.8) については Fubini の定理 (2a) より a.e. x に対して $f(x-y)g(y)$ は y の関数として可積分なので (i) と同様に示される。 $\square$

$L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ で可測関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ で任意の有界閉集合 $K \subset \Omega$ に対し $\int_K |f| dx < \infty$ なるものの全体を表す。 $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ に属する関数を局所可積分関数という。問題 3.2(1) と同様に任意の $1 \leq p \leq \infty$ に対して $L^p(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ であることが従う。また $C(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ となる。

命題 3.8 $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d), \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ のとき

$$\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \partial_x^\alpha (\varphi * f) = ((\partial_x^\alpha \varphi) * f). \quad (3.9)$$

ここで $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ は非負整数の組 (**多重指数** という) とし、 $\partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\alpha_d}$ とする。

証明: 積分記号のもとでの微分法に関する定理 (cf. 例えば [I] p.95) を用いればよいので演習問題とする。 $\square$

定理 3.9 $1 \leq p < \infty$ のとき、 $C_0^\infty(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ で稠密である。

証明: 任意の $\varepsilon > 0$ と $f \in L^p(\Omega)$ をとる。定理 3.5 より $g \in C_0(\Omega)$ で $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$ となるものが存在する。 $d_0 = \text{dist}(\text{supp } g, \Omega^c)$ とすると $d_0 > 0$ に注意する。

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ が次を満たすとし、 $\varphi_\delta(x) = \delta^{-d}\varphi(x/\delta)$, $\delta > 0$, とする:

$$0 \leq \varphi(x), \quad |x| \geq 1 \text{ なら } \varphi(x) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1. \quad (3.10)$$

例えば $\varphi(x) = \begin{cases} C^{-1} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & x : |x| < 1 \\ 0, & x : |x| \geq 1 \end{cases}$, $C = \int_{\{|x|<1\}} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) dx$ ととればよい。この φ_δ を**軟化子** (molifier) と呼ぶ。

このとき、命題 3.8 より $\varphi_\delta * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ($g(x) \equiv 0$, $x \notin \Omega$ と拡張しておく) かつ $0 < \delta < d_0$ なら $\text{supp}(\varphi_\delta * g) \subset \Omega$ となる。実際、 $x \in \Omega$ が $\text{dist}(x, \text{supp } g) \geq \delta$ を満たせば

$$\varphi_\delta * g(x) = \int_{|y-x|<\delta} \varphi_\delta(y-x)g(y) dy = 0.$$

故に $\text{supp}(\varphi_\delta * g)$ は $(\text{supp } g)_\delta \equiv \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \text{supp } g) \leq \delta\}$ の部分集合で、定義より閉集合だから、 $\varphi_\delta * g \in C_0^\infty(\Omega)$ 。次に、 $0 < \delta_1 < d_0$ を固定して $K_1 = (\text{supp } g)_{\delta_1}$ とおくと $0 < \delta < \delta_1$ に対して $\text{supp}(\varphi_\delta * g), \text{supp } g \subset K_1$ となる。また、 g は一様連続だから $0 < \delta_0 < \delta_1$ を $x, y \in \mathbb{R}^d : |y| < \delta_0$ ならば $|g(x-y) - g(x)| < \varepsilon/(2\mu_d(B_R)^{1/p})$ とできる。このとき (3.8) により $0 < \delta < \delta_0$ ならば

$$|\varphi_\delta * g(x) - g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)(g(x-\delta y) - g(x)) dy \right| < \varepsilon/(2\mu_d(K_1)^{1/p}).$$

よって $\|\varphi_\delta * g - g\|_p^p \leq \int_{K_1} |\varphi_\delta * g(x) - g(x)|^p dx < (\varepsilon/2)^p$ となり、 $\|\varphi_\delta * g - f\|_p \leq \|\varphi_\delta * g - g\|_p + \|g - f\|_p < \varepsilon$ を得る。□

定理 3.10 $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ であって、任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して $\int_\Omega f(x)\varphi(x) dx = 0$ ならば $f = 0$ a.e.

証明: 任意の有界閉集合 $K \subset \Omega$ に対して $\int_K |f| dx = 0$ を示せばよい。

$$g(x) = \begin{cases} \overline{f(x)}/|f(x)|, & x \in K : f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

とし、 φ_δ を軟化子とすると命題 3.8 より $g * \varphi_\delta$ は C^∞ -級で定理 3.9 の証明と同様に $\text{supp}(g * \varphi_\delta) \subset K_\delta = \{x; \text{dist}(x, K) \leq \delta\}$ 及び $\lim_{\delta \downarrow 0} \|g * \varphi_\delta - g\|_1 = 0$ を得る。特に $g * \varphi_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ で系 3.4 より g に a.e. で収束する部分列 $\{g * \varphi_{\delta_n}\}$ が存在することがわかる。また K_1 は有界閉集合で $0 < \delta_n < 1$ なら $|f|g * \varphi_{\delta_n} \leq |f|1_{K_1}$ であるから、Lebesgue の優収束定理により

$$\int f g dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(g * \varphi_{\delta_n}) dx$$

であるが定理の仮定により (右辺) = 0. ここで $\int f g dx = \int_K |f| dx$ であるから証明は完了した。□

問 3.5 (熱方程式) $x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \lambda > 0$ に対し **Gauss 核** $k_t(x)$ 及び λ 次の **Green 核** $g_\lambda(x)$ を次で定める:

$$k_t(x) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right), \quad (3.11)$$

$$g_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} k_t(x) dt. \quad (3.12)$$

(1) $k_t(x)$ は $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ 上 C^∞ -級, $g_\lambda(x)$ は $(x, \lambda) \in (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \times (0, \infty)$ 上 C^∞ -級. 更に **Laplace 作用素** $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ に対して次が成立することを示せ.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta\right)k_t(x) = 0, \quad \left(\lambda - \frac{1}{2}\Delta\right)g_\lambda(x) = 0, \quad x \neq 0.$$

(2) $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき、 $(k_t * f)(x)$ は $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ 上 C^∞ -級で熱方程式を満たすことを示せ.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta\right)(k_t * f)(x) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta\right)k_t * f\right)(x) = 0.$$

Hint: まず次を示す; 多重指数 α と $m = 0, 1, \dots$ に対し、

$$\partial_x^\alpha \partial_t^m k_t(x) = (x, t^{-1/2} \text{ の多項式 }) e^{-|x|^2/2t}.$$

これを用いて積分記号のもとでの微分法に関する定理を用いる。

(3) $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$ に対して次を示せ:

$$\lim_{t \downarrow 0} \|k_t * f - f\|_p = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda g_\lambda * f - f\|_p = 0.$$

注意: 上式の前者は熱方程式の解 $(k_t * f)(x)$ が「時刻 0 において各 $x \in \mathbb{R}^d$ における温度が $f(x)$ 」であることを意味している。

問 3.6 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ であって、 $\varphi \geq 0$ なる任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して $\int f(x)\varphi(x) dx \geq 0$ ならば $f \geq 0$ a.e. であることを示せ。(注意: これを用いて定理 3.10 を示すこともできる。)

ここでノルム空間の完備化に簡単にふれておく。

定理 3.11 (完備化) 完備でないノルム空間 $(X, \|\cdot\|_X)$ が与えられたとき¹⁵、これに対して完備なノルム空間 $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ と一対一の線形写像 $\kappa: X \rightarrow \tilde{X}$ で次を満たすものが存在する:

$$\|\kappa(u)\|_{\tilde{X}} = \|u\|_X, \quad \kappa(X) \text{ は } \tilde{X} \text{ の稠密部分集合}. \quad (3.13)$$

証明: $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X$ と略記する。 X の Cauchy 列 $\{u_l\}, \{v_l\}$ は $\lim_{l \rightarrow \infty} \|u_l - v_l\| = 0$ のとき同値である ($\{u_l\} \sim \{v_l\}$) と見なして同値類分解する。 $\{u_l\}$ を含む類を $\{u_l\}'$ と書き、この類の全体を $\tilde{X}$ で表す。このとき、

$$\{u_l + v_l\}' = \{u_l\}' + \{v_l\}', \quad \{\alpha u_l\}' = \alpha \{v_l\}' \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

として $\tilde{X}$ は線形空間となる。次に $\tilde{X}$ のノルムを $\|\{u_l\}\|_{\tilde{X}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \|u_l\|$ で定める。ただし、 $\|\{u_k\}\| - \|\{u_l\}\| \leq \|u_k - u_l\|$ より左辺は収束し、また同値な列 $\{u_l\}$ の選び方に依存しないことに注意する。このとき、 $\|\cdot\|_{\tilde{X}}$ がノルムの定義 3.2 を満たすことは明らかであろう。

¹⁵一般の距離空間空間に対しても、同様に完備化できる。

最後に $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ が完備であることを示すために Cauchy 列 $\{\tilde{u}^{(k)}\} = \{\{u_l^{(k)}\}'\} \subset \tilde{X}$ をとる。任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して M_k を

$$\|u_l^{(k)} - u_{M_k}^{(k)}\| < 1/k \quad (\forall l > M_k) \quad (3.14)$$

ととれる。ここで $u_{M_k}^{(k)}$ と固定した恒等列を $\bar{u}^{(k)}$ と書くと、(3.14) より

$$\|\tilde{u}^{(k)} - \bar{u}^{(k)}\|_{\tilde{X}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \|u_l^{(k)} - u_{M_k}^{(k)}\| \leq 1/k. \quad (3.15)$$

従って、

$$\begin{aligned} \|u_{M_k}^{(k)} - u_{M_j}^{(j)}\| &= \|\bar{u}^{(k)} - \bar{u}^{(j)}\|_{\tilde{X}} \leq \|\bar{u}^{(k)} - \tilde{u}^{(k)}\|_{\tilde{X}} + \|\tilde{u}^{(k)} - \tilde{u}^{(j)}\|_{\tilde{X}} + \|\tilde{u}^{(j)} - \bar{u}^{(j)}\|_{\tilde{X}} \\ &\leq \|\tilde{u}^{(k)} - \tilde{u}^{(j)}\|_{\tilde{X}} + 1/k + 1/j \end{aligned}$$

を得る。よって $\{\tilde{u}^{(l)}\}$ は Cauchy 列である。これを含む同値類を $\tilde{u}$ と書くと、(3.15) より

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - \tilde{u}^{(k)}\|_{\tilde{X}} &\leq \|\tilde{u} - \bar{u}^{(k)}\|_{\tilde{X}} + \|\bar{u}^{(k)} - \tilde{u}^{(k)}\|_{\tilde{X}} \leq \|\tilde{u} - \bar{u}^{(k)}\|_{\tilde{X}} + 1/k, \\ \|\tilde{u} - \bar{u}^{(k)}\|_{\tilde{X}} &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} \|u_{M_l}^{(l)} - u_{M_k}^{(k)}\| \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \|\tilde{u}^{(l)} - \bar{u}^{(k)}\|_{\tilde{X}} + 1/k \end{aligned}$$

であるから、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u} - \bar{u}^{(k)}\|_{\tilde{X}} = 0$ となり、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u} - \tilde{u}^{(k)}\|_{\tilde{X}} = 0$ を得る。 $\square$

例 3.2 (1) 定理 3.2, 3.9 で見たように、 $1 \leq p < \infty$ のとき $L^p(\Omega)$ はノルム $\|\cdot\|_p$ に関して完備であり、 $C_0^\infty(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ で稠密である。これより、 $C_0^\infty(\Omega)$ の $\|\cdot\|_p$ による完備化は $L^p(\Omega)$ である。

一方、 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を $\|\cdot\|_\infty$ で完備化すると $\widehat{C}_\infty(\mathbb{R}^d) = \{u \in C(\mathbb{R}^d); \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0\}$ となる。

(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合、 $1 \leq p < \infty$ とする。 $k = 0, 1, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} V^{k,p}(\Omega) &= \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}); \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}, \\ \|u\|_{k,p} &= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}, \quad u \in V^{k,p}(\Omega) \end{aligned}$$

と定義する。ここで、多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ に対して $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ と定める。このとき、 $(V^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$ はノルム空間である。このノルム空間 $(V^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$ の完備化を $W^{k,p}(\Omega)$ と書いて **Sobolev 空間** と呼ぶ。また、 $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$ もノルム空間であるが、この完備化を $W_0^{k,p}(\Omega)$ とかく。一般に $W_0^{k,p}(\Omega)$ は $W^{k,p}(\Omega)$ は一致しない。例えば

$$\begin{aligned} W^{1,2}((0,1)) &= \{u \in C([0,1]); u \text{ は絶対連続で } u' \in L^2([0,1])\}, \\ W_0^{1,2}((0,1)) &= \{u \in W^{1,2}(0,1); u(0) = u(1) = 0\} \end{aligned}$$

となる。 $p = 2$ のとき $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$ とかくことが多い。

定義 3.4 位相空間 X が稠密な可算部分集合をもつとき **可分** (separable) であるという。

例 3.3 (1) $\mathbb{R}$ は可分である。実際、 $\mathbb{Q}$ が稠密な可算集合である。

(2) Weiestrass の多項式近似定理により有理数を係数とする多項式全体は $(C([a, b]^d), \|\cdot\|_\infty)$ で稠密であることがわかる。これより、 $\widehat{C}_\infty(\mathbb{R}^d)$ や $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, の可分性が従う。
 (3) $L^\infty(\Omega)$ は可分ではない。簡単のため数列空間 $\ell^\infty(\mathbb{N})$ で略証を述べる。任意の $A \subset \mathbb{N}$ に対し $u_A(n) = 1$ ($n \in A$), $= 0$ ($n \notin A$) で $u_A \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ を定義すると、 $A \neq B$ なら $\|u_A - u_B\|_\infty = 1$. これと $\mathbb{N}$ の冪集合の濃度が非可算であることより $\ell^\infty(\mathbb{N})$ が可分にならないことがわかる。

問 3.7 (Weiestrass の多項式近似定理) 関数 $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、次を示せ:

$$\left| \sum_{k_1, \dots, k_d=1}^n f\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_d}{n}\right) \prod_{j=1}^d \binom{n}{k_j} x_j^{k_j} (1-x_j)^{n-k_j} - f(x_1, \dots, x_d) \right| \leq \frac{d\|f\|_\infty}{2\delta^2 n} + \omega(\delta).$$

ただし、 $\omega(\delta) = \sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)|$ とする。特に f が連続なら左辺は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に $(x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$ 上で一様収束する。

Hint: $\{X_k^{(j)}\}$ を独立な確率変数で各 j に対し $P(X_k^{(j)} = 1) = x_j, P(X_k^{(j)} = 0) = 1 - x_j$, $k = 1, 2, \dots$, とする。このとき $Y_n = (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^{(1)}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^{(d)})$, $x = (x_1, \dots, x_d)$ とおくと

$$\begin{aligned} (\text{与式の左辺}) &= |E[f(Y_n)] - f(x)| \leq E[|f(Y_n) - f(x)|] \\ &\leq 2\|f\|_\infty P(|Y_n - x| \geq \delta) + \omega(\delta). \end{aligned}$$

右辺第一項に Chebyshev の不等式を用い分散を計算すれば結論を得る。

3.3 線形作用素、線形汎関数

V, W を線形空間とする。 V の線形部分空間 V_0 から W への線形写像 $T : V_0 \rightarrow W$, i.e.,

$$\forall u, v \in V_0, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ に対して } T(\alpha u + \beta v) = \alpha T u + \beta T v$$

となるとき、 T を V_0 で定義された**線形作用素** (linear operator) といい、 V_0 を T の**定義域** (domain) と呼んで $D(T)$ と書く。また集合 $\{Tu; u \in D(T)\} \subset W$ を T の**値域** (range) と呼んで $R(T)$ と書く。特に $W = \mathbb{C}$ のとき T を**線形汎関数** (linear functional) という。

V, W をノルム空間でそのノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$ とする。 $D(T) \subset V$ から W への線形作用素 T が**連続**であるとは

$$u_n, u \in D(T), n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_V = 0 \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tu_n - Tu\|_W = 0$$

となることである。このとき次が成立する。

定理 3.12 $D(T) \subset V$ から W への線形作用素 T が連続であるための必要十分条件は

$$\text{ある } \beta < \infty \text{ が存在して任意の } u \in D(T) \text{ に対して } \|Tu\|_W \leq \beta \|u\|_V \quad (3.16)$$

が成立することである。このとき T を**有界**といい、(3.16) が成立する β の下限を $\|T\|$ と書き T の**(作用素)ノルム**という:

$$\|T\| = \sup_{u \in D(T): \|u\|_V=1} \|Tu\|_W = \sup_{u \in D(T): u \neq 0} \frac{\|Tu\|_W}{\|u\|_V}. \quad (3.17)$$

証明: 十分性は明らか。必要性を背理法で示す。(3.16)を否定すると各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|Tu_n\|_W > n\|u_n\|_V$ となる $u_n \in D(T)$ が存在する。 T の線形性より $u = 0$ なら $Tu = 0$ より $u_n \neq 0$. よって、 $v_n = u_n/(n\|u_n\|_V)$ とおくと $\|v_n\|_V = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. T の連続性より $\|Tv_n\|_W \rightarrow 0$. 一方 $\|Tv_n\|_W = \frac{\|Tu_n\|_W}{n\|u_n\|_V} > 1$ となるから矛盾する。 $\square$

注意 3.2 (3.17) で導入されたノルム $\|\cdot\|$ は $\|\cdot\|_{V \rightarrow W}$, $\|\cdot\|_{B(V,W)}$ などと記し、作用素ノルムであることを区別すべきであろう。ここでは、混乱しないと思われる限り $\|\cdot\|$ で記す。

定理 3.13 V, W がノルム空間であって W が完備 (従って *Banach* 空間) であるとし、 V_0 は V の稠密な線形部分空間であるとする。このとき $D(T) = V_0$, $R(T) \subset W$ なる有界線形作用素 T は $D(\tilde{T}) = V$, $R(\tilde{T}) \subset W$ なる有界線形作用素 $\tilde{T}$ に一意的に拡張され $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ である。以下有界線形作用素の定義域は V 全体で定義されているものとする。

証明: (i) V_0 は V で稠密だから任意の $u \in V$ に対して $\|u_n - u\|_V \rightarrow 0$ なる $\{u_n\} \subset V_0$ が存在する。このとき $\{Tu_n\}$ は W の Cauchy 列となる:

$$\|Tu_m - Tu_n\|_W \leq \|T\| \|u_m - u_n\|_V \leq \|T\| (\|u_m - u\|_V + \|u_n - u\|_V) \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty$$

W は完備より $w = \lim_{n \rightarrow \infty} Tu_n$ in W が存在する。この w は u のみによって決まる。実際 u に収束する別の列 $\{u'_n\} \subset V$ をとり $Tu'_n \rightarrow w'$ in W とすると

$$\begin{aligned} \|w - w'\|_W &\leq \|w - Tu_n\|_W + \|Tu_n - Tu'_n\|_W + \|Tu'_n - w'\|_W \\ &\leq \|w - Tu_n\|_W + \|T\| (\|u_n - u\|_V + \|u'_n - u\|_V) + \|Tu'_n - w'\|_W. \end{aligned}$$

右辺は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束するので $w = w'$ を得る。よってこの対応を $w = \tilde{T}u$ とする。これについて $D(\tilde{T}) = V$, $R(\tilde{T}) \subset W$ は明らかである。

(ii) $\tilde{T}$ が線形作用素であること: $u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とし、 $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$ in V なる $\{u_n\}, \{v_n\} \subset V_0$ をとれば、 $\alpha u_n + \beta v_n \in V_0, \alpha u_n + \beta v_n \rightarrow \alpha u + \beta v$ in V であるから $T(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha Tu_n + \beta Tv_n$ において $n \rightarrow \infty$ とすれば $\tilde{T}(\alpha u + \beta v) = \alpha \tilde{T}u + \beta \tilde{T}v$ を得る。

(iii) $\tilde{T} \supset T$ であること¹⁶: $u \in V_0$ なら $u_n = u$ ととればよいので $\tilde{T}u = \lim_{n \rightarrow \infty} Tu_n = Tu$.

(iv) $\|\tilde{T}\| = \|T\|$: $\|u\|_V = 1$ なる任意の $u \in V$ に対して $\|u_n - u\|_V \rightarrow 0$ なる $\{u_n\} \subset V_0$ をとると $\|u_n\|_V \rightarrow \|u\|_V = 1$. ここで $\|Tu_n\|_W \leq \|T\| \|u_n\|_V$ で $n \rightarrow \infty$ として $\|\tilde{T}u\|_W \leq \|T\|$, 従って $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. 一方、作用素ノルムの定義より

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{u \in V: \|u\|_V=1} \|\tilde{T}u\|_W \geq \sup_{u \in V_0: \|u\|_V=1} \|Tu\|_W = \|T\|.$$

よって $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ を得る。

(v) また (i) と同様にすれば拡張 $\tilde{T}$ の一意性も従うから証明は完了した。 $\square$

例 3.4 (1) $V = L^1([0, 2\pi])$ とその稠密な線形部分空間 $C^\infty([0, 2\pi])$ を考える。微分作用素 $T = \frac{d}{dx}$ は $D(T) = C^\infty([0, 2\pi])$, $R(T) \subset V$ なる線形作用素であるが、有界ではない。実際 $u_n(x) = e^{\sqrt{-1}nx}$ とすると $\|u_n\|_1 = 2\pi$, $\|Tu_n\|_1 = 2\pi|n|$ となるからである。この場合 $D(\tilde{T}) = V$ なる拡張は存在しない。

¹⁶線形作用素 A, B に対して $D(A) \subset D(B)$ かつ $Au = Bu$ ($\forall u \in D(A)$) になるとき $A \subset B$ と書く。

(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とする。 $K = K(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ とし $u \in L^2(\Omega)$ に対して

$$Ku(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y) dy$$

と定めると K は $L^2(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への有界線形作用素である。実際 *Schwarz* の不等式 (*Hölder* の不等式で $p = q = 2$ の場合) により

$$\int |Ku(x)|^2 dx \leq \int dx \left(\int |K(x, y)u(y)| dy \right)^2 \leq \iint |K(x, y)|^2 dy dx \|u\|_2^2.$$

(3) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とする。 $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ のとき、任意の $g \in L^q(\mu)$ を固定し $f \in L^p(\mu)$ に対して

$$\ell_g f = \int_X fg d\mu$$

とおくと、*Hölder* の不等式により ℓ_g は連続線形汎関数となる。実は $L^p(\mu)$ の連続線形汎関数全体 $L^p(\mu)'$ が $L^q(\mu)$ と同一視できる。

(4) K をコンパクト集合¹⁷とし、 K 上の複素測度 ν を固定し $f \in C(K)$ に対して

$$\ell_{\nu} f = \int_K f d\nu$$

とおくと、 ℓ_{ν} は $C(K)$ 上の連続線形汎関数となる。ただし $C(K)$ には一様ノルム $\|\cdot\|_{\infty}$ を入れる (cf. (3.1), 例 3.1 (2))。実は $C(K)$ の連続線形汎関数全体 $C(K)'$ は K 上の複素測度全体と同一視できる (*Riesz-Markov*-角谷の定理)。

注意: X が完備可分距離空間のとき $K \supset X$ なる「適当な」コンパクト集合 K を用い X 上の確率測度全体 $\mathcal{P}(X)$ を $C(K)'$ の部分集合とし位相を入れる。この位相で中心極限定理などは述べられる。ただし、その位相は定義 3.5 で導入するノルムによる位相や強位相ではなく、*weak**-位相と呼ばれる弱い位相である。(確率論では弱収束という。)

V, W がノルム空間であって W が完備 (従って Banach 空間) であるとする。 $B(V, W)$ で有界線形作用素 $T: V \rightarrow W$ 全体を表す。

$A, B \in B(V, W), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$(\alpha A + \beta B)u = \alpha Au + \beta Bu, \quad u \in V$$

と定めると $\alpha A + \beta B$ は再び V から W への線形写像で

$$\|(A + B)u\|_W \leq (\|A\| + \|B\|)\|u\|_V, \quad \|(\alpha A)u\|_W = |\alpha|\|Au\|_W$$

を満たす。故に $B(V, W)$ は $\mathbb{C}$ 上の線形空間で

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|(\alpha A)\| = |\alpha|\|A\|.$$

従って $B(V, W)$ はノルム空間となる。また V, W, X がノルム空間のとき $A \in B(V, W), B \in B(W, X)$ なら $BA \in B(V, X)$ で $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$ である。特に $B(V) \equiv B(V, V)$ は積について閉じている、即ち、algebra の構造をもっている。

¹⁷ コンパクト集合は常に Hausdorff の分離公理を満たすと仮定する。

定義 3.5 $A_n, A \in B(V, W)$ ($n \in \mathbb{N}$) とする。 $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ のとき A_n は A に **ノルム収束** する、任意の $u \in V$ に対して $\|A_n u - Au\|_W \rightarrow 0$ のとき A_n は A に **強収束** するという。

定理 3.14 V をノルム空間、 W を Banach 空間とする。このとき $(B(V, W), \|\cdot\|)$ は Banach 空間である。特に有界線形汎関数全体のなす空間 $V' \equiv B(V, \mathbb{C})$ も Banach 空間となる。 V' を V の **共役空間** あるいは **双対空間** (dual space) という。

証明: 完備性を証明すればよい。 $\{A_n\} \subset B(V, W)$ を Cauchy 列とする。 $u \in V$ に対して $\|A_m u - A_n u\|_W \leq \|A_m - A_n\| \|u\|_V$ より $\{A_n u\}$ は Banach 空間 W の Cauchy 列であるからこの極限が存在しそれを Au と記す。 $A : V \rightarrow W$ が線形であることは明らかであろう。 $|\|A_m\| - \|A_n\|| \leq \|A_m - A_n\|$ より実数列 $\{\|A_m\|\}$ は Cauchy 列であるから $M \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| < \infty$. 以上より

$$\|Au\|_W \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n u\|_W \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \|u\|_V \leq M \|u\|_V.$$

即ち、 $A \in B(V, W)$ で $\|A\| \leq M$. $\|u\|_V = 1$ のとき、

$$\|(A_m - A)u\|_W = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A_m - A_n)u\|_W \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_m - A_n\|.$$

だから $\|A_m - A\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_m - A_n\|$. 故に $\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m - A\| = 0$ である。 $\square$

注意 3.3 (1) 定理 3.13 より $A \in B(V)$ に対して $e^{tA} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (tA)^n / n!$ が (有限和による Cauchy 列のノルム収束の極限として) 定義されることがわかる。これにより常微分方程式 $u' = Au$ は解くことが出来る。しかし、例 3.4(1) で見たように微分作用素などは非有界であり、その場合 e^{tA} を議論するためには、Hille-Yosida の定理を用いる¹⁸。

(2) 同様に $T \in B(V)$ が $\|T\| < 1$ であれば、 $I - T$ は V の同型作用素で $(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \cdots$ である。これを Neumann 級数と言う。ただし、 I は恒等写像を、 $(I - T)^{-1}$ は $I - T$ の逆写像として定義される作用素を表す。

¹⁸例えば Kosaku Yosida: Functional Analysis, Springer を参照のこと。

4 Fourier 級数, Fourier 変換

4.1 Hilbert 空間, 直交系

定義 4.1 線形空間 H に対して、 $H \times H$ 上の複素数値関数 $(\cdot, \cdot)$ で任意の $u, v, w \in H$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

(i) (正値性) $(u, u) \geq 0$, $u = 0$ のときかつそのときに限り $(u, u) = 0$;

(ii) (線形性) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$, $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$;

(iii) (歪対称性) $(u, v) = \overline{(v, u)}$

を満たすものを H 上の内積という。内積の定義された線形空間を**内積空間**あるいは **pre-Hilbert 空間**という。 $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ と定義する。

補題 4.1 (Schwarz の不等式) $u, v \in H$ に対して $|(u, v)| \leq \|u\|\|v\|$ が成立する。

証明: $v = 0$ のときは明らか。 $v \neq 0$ のとき $t \in \mathbb{C}$ に対して $(u - tv, u - tv) = \|u\|^2 + |t|^2\|v\|^2 - 2\operatorname{Re}(u, tv) \geq 0$ であるが、ここで $t = (u, v)/\|v\|^2$ とおけばよい。 $\square$

定理 4.2 $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ は H 上のノルムである。このノルムは**中線定理**:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad (4.1)$$

を満たす。逆にノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ が (4.1) を満たせば、 X 上の内積 $(\cdot, \cdot)$ で $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, $\forall u \in X$ を満たすものが存在する。

証明: $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ は H 上のノルムであることと (4.1) の証明は略す。 $\|u\|$ が (4.1) を満たすとき、

$$(u, v) = \frac{1}{4} \{ (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) + i(\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2) \}$$

と定義すると、 (u, v) が内積の公理 (i), (iii) 及び $(u, u) = \|u\|^2$ を満たすことは明らか。(ii) について示す。まず $(0, v) = 0$ は明らか。次に、(4.1) より

$$\begin{aligned} (u, w) + (v, w) &= \frac{1}{4} \{ (\|u + w\|^2 - \|u - w\|^2) + i(\|u + iw\|^2 - \|u - iw\|^2) \\ &\quad + (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2) + i(\|v + iw\|^2 - \|v - iw\|^2) \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left\| \frac{u+v}{2} + w \right\|^2 - \left\| \frac{u+v}{2} - w \right\|^2 + i \left\| \frac{u+v}{2} + iw \right\|^2 - i \left\| \frac{u+v}{2} - iw \right\|^2 \right\} \\ &= 2 \left(\frac{u+v}{2}, w \right). \end{aligned}$$

特に $v = 0$ とおいて $(u, w) = 2 \left(\frac{u}{2}, w \right)$ を得る。よって、 u を $u + v$ とすることで $(u, w) + (v, w) = 2 \left(\frac{u+v}{2}, w \right) = (u + v, w)$ を得る。一方、このことから $\alpha = m/2^n$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) に対して $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$ はわかる。よって任意の実数は $m/2^n$ なる数で近似できると、ノルム $\|\cdot\|$ の連続性により α が実数の場合の証明は完了した。また、定義より $(iu, v) = i(u, v)$ は明らかなので、以上より $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$((\alpha + i\beta)u, v) = (\alpha u, v) + i(\beta u, v) = \alpha(u, v) + i\beta(u, v) = (\alpha + i\beta)(u, v)$$

となり証明は完了した。 $\square$

定義 4.2 内積空間 H は、定理 4.2 で定義したノルムによって $(H, \|\cdot\|)$ が Banach 空間になるとき **Hilbert 空間** であるという。

問 4.1 $u_n, v_n, u, v \in H$ で $\|u_n - u\| \rightarrow 0, \|v_n - v\| \rightarrow 0$ のとき、 $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ を示せ。

例 4.1 $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ は次の内積で Hilbert 空間である (cf. 定義 3.1)。

$$(u, v) = \int_X u(x) \overline{v(x)} d\mu(x). \quad (4.2)$$

証明: 内積の公理を満たすことは明らか。完備性は定理 3.2 で示した。 $\square$

以下、特に断らない限り H は Hilbert 空間であるとする。

定義 4.3 (1) $u, v \in H$ は $(u, v) = 0$ のとき、互いに直交するといい $u \perp v$ とかく。
(2) $S \subset H$ に対して $S^\perp = \{u \in H; u \perp v \ \forall v \in S\}$ とかく。特に S が H の線形部分空間のとき、 $S^\perp$ を S の **直交補空間** という。

定理 4.3 $X \subset H$ を閉部分空間とする。このとき、任意の $u \in H$ は一意的に

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in X, \ u_2 \in X^\perp \quad (4.3)$$

と直和分解される。これを H の **直交分解** といい $H = X \oplus X^\perp$ とかく。 $u_1 \in X$ は u に最も近い X の唯一の元で、 u の X への **正射影**, **直交射影** あるいは **射影** (projection) と呼ばれる。 u を u_1 に対応させる写像 $P_X: H \rightarrow X$ は線形写像で

$$P_X^2 = P_X, \quad (P_X u, v) = (u, P_X v) \ \forall u, v \in H$$

を満たす。 P_X を X への **直交射影作用素** あるいは **射影作用素** という。

証明: 定義 4.1(1) より $X \cap X^\perp = \{0\}$ であるから直交分解の一意性はすぐわかる。

直交分解の存在を示す。 $u \in X$ のときは $u_1 = u, u_2 = 0$ とすればよい。 $u \notin X$ とする。 X は閉だから、 $\inf_{v \in X} \|u - v\| \equiv l > 0$ 。 $\{v_n\} \subset X$ を $\|u - v_n\| \rightarrow l$ ととる。 $\{v_n\}$ は Cauchy 列となる。実際、 $(v_n + v_m)/2 \in X$ より $\|2u - (v_n + v_m)\| = 2\|u - (v_n + v_m)/2\| \geq 2l$ 。中線定理 (4.1) と合わせて

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v_n - v_m\|^2 = 2(\|u - v_n\|^2 + \|u - v_m\|^2) - \|2u - (v_n + v_m)\|^2 \\ &\leq 2(\|u - v_n\|^2 + \|u - v_m\|^2) - 4l^2 \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。 $\{v_n\}$ の極限を v とすると X は閉だから $v \in X$ で $\|u - v\| = l$ である。任意の $w \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ に対して $v + \alpha w \in X$ だから

$$l^2 \leq \|u - (v + \alpha w)\|^2 = \|u - v\|^2 + \alpha^2 \|w\|^2 - 2\alpha \operatorname{Re}(u - v, w).$$

故に、 $0 \leq \alpha^2 \|w\|^2 - 2\alpha \operatorname{Re}(u - v, w), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ 。これより $\operatorname{Re}(u - v, w) = 0$ 。 w を iw に置き換えても同じことが成り立つから $\operatorname{Im}(u - v, w) = 0$ 。あわせて $(u - v, w) = 0$ 。故に $u - v \in X^\perp$ となり $u = v + (u - v)$ が求める分解 (4.3) である。

任意の $0 \neq w \in X$ に対して $\|u - (v + w)\|^2 = l^2 + \|w\|^2 > l^2$. 従って v は $\|u - v\| = l$ を満たす唯一の X の元である。分解 (4.3) が一意的で $X, X^\perp$ は部分空間であるから P_X の線形性は容易にわかる。また、 $u \in X$ なら $P_X u = u$ より $P_X^2 u = P_X u, \forall u \in H$ である。 $u, v \in H$ を $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2, u_1, v_1 \in X, u_2, v_2 \in X^\perp$ と直交分解すれば

$$(P_X u, v) = (u_1, v_1 + v_2) = (u_1, v_1) = (u_1 + u_2, v_2) = (u, P_X v). \quad \square$$

定義 4.4 H の部分集合 S は任意の $u, v \in S$ ($u \neq v$) が直交するとき**直交系** (orthogonal system) とよぶ。 $u \in H$ が $\|u\| = 1$ であるとき、**正規化**されているという。直交系 S はその任意の元が正規化されているとき**正規直交系** (orthonormal system) いう。

次は **Schmidt の直交化法**として知られている。証明は略す。

命題 4.4 $S_0 = \{u_1, u_2, \dots\}$ を H の有限または可算部分集合で一次独立とする。このとき、

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, \quad w_2 = \frac{u_2 - (u_2, w_1)w_1}{\|u_2 - (u_2, w_1)w_1\|}, \quad \dots, \quad w_n = \frac{u_n - \sum_{k=1}^{n-1} (u_n, w_k)w_k}{\|u_n - \sum_{k=1}^{n-1} (u_n, w_k)w_k\|}, \quad \dots,$$

と定めると、 $S = \{w_1, w_2, \dots\}$ は正規直交系をなす。このとき任意の n に対して、 w_n は $u_1, \dots, u_n$ の一次結合で、 u_n は $w_1, \dots, w_n$ の一次結合で表せる。

例 4.2 (1) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}; n \in \mathbb{Z} \right\}$ は $L^2(-\pi, \pi)$ において正規直交系をなす。

(2) Legendre の多項式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ に対し、 $\{P_n(x); n = 0, 1, \dots\}$ は $L^2(-1, 1)$ における直交系である。 $\int_{-1}^1 |P_n(x)|^2 dx = \frac{2}{2n+1}$ であるから、正規化するためには $P_n(x)$ のかわりに $\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ をとればよい。

(3) Hermite の多項式 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$, Laguerre の多項式 $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$ に対しても

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx &= \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & (m = n) \end{cases} \\ \int_0^{\infty} L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx &= \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ (n!)^2 & (m = n) \end{cases} \end{aligned}$$

が成立するから $\{H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}; n = 0, 1, \dots\}, \{L_n(x) e^{-\frac{x}{2}}; n = 0, 1, \dots\}$ はそれぞれ $L^2(\mathbb{R}), L^2(0, \infty)$ における直交系である。

問 4.2 $L^2(-1, 1)$ における関数系 $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ を Schmidt の直交化法により正規直交化せよ。また、それと Legendre の多項式 $P_n(x)$ を比較せよ。同様に、 $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx), L^2((0, \infty), e^{-x} dx)$ において関数系 $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ を Schmidt の直交化法によりそれぞれ正規直交化し、それを Hermite の多項式 $H_n(x)$, Laguerre の多項式 $L_n(x)$ と比較せよ。

4.2 Fourier 級数

この節では、特に断らない限り H は Hilbert 空間であるとし、 $(\cdot, \cdot)$ でその内積を表す。

命題 4.5 $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ を H の正規直交系とし、 $u \in H$ に対して $\{c_n = (u, \varphi_n)\}$ を u の $\{\varphi_n\}$ に対する **一般化 Fourier 係数** という。 $X_n = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle \equiv \{ \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \}$ ($\varphi_1, \dots, \varphi_n$ の張る部分空間)、 P_{X_n} を X_n への正射影とする。このとき次が成立する:

- (1) $P_{X_n} u = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$. ($c_k = (u, \varphi_k)$ とした。)
- (2) $\|u - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k\|^2 = \|u - P_{X_n} u\|^2 + \sum_{k=1}^n |a_k - c_k|^2$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.
- (3) $\min_{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}} \|u - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k\|^2 = \|u - P_{X_n} u\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$.
- (4) (**Bessel の不等式**) $\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \leq \|u\|^2$.

証明: (1) $u_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$ とおくと $u_n \in X_n$ で $(u - u_n, \varphi_k) = c_k - c_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$). よって、 $u - u_n \perp X_n$ であり、定理 4.3 の直交分解の一意性より $P_{X_n} u = u_n$.

(2) $u - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k = u - u_n + \sum_{k=1}^n (c_k - a_k) \varphi_k$ と $u - u_n \perp \sum_{k=1}^n (c_k - a_k) \varphi_k$ より明らか。

(3) 最初の等号は (2) より明らか。第 2 の等号は (2) で $a_1 = \dots = a_n = 0$ とせよ。

(4) (3) の右辺 ≥ 0 より $\|u\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |c_k|^2$. ここで $n \rightarrow \infty$ とすれば得られる。 $\square$

命題 4.6 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を H の正規直交系、 X を $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ の張る閉部分空間、即ち、

$\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, なる元のなす集合の H における閉包とし、 P_X を X への正射影とする。このとき、次が成立する:

- (1) 任意の $\{a_k\} \in \ell^2(\mathbb{N})$ に対して、 $\sum_{k=1}^\infty a_k \varphi_k$ は H において収束する。
- (2) $X = \{ \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \varphi_k; \{\alpha_k\} \in \ell^2(\mathbb{N}) \}$.
- (3) $P_X u = \sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k$, $c_k = (u, \varphi_k)$ である。

証明: (1) $\{a_k\} \in \ell^2(\mathbb{N})$ に対して、 $u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$ ($n \in \mathbb{N}$) とおく。 $u_n \in X$ で $m < n$ のとき $\|u_n - u_m\|^2 = \|\sum_{k=m+1}^n a_k \varphi_k\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |a_k|^2 \rightarrow 0$, $m, n \rightarrow \infty$. よって、 H の完備性より $\sum_{k=1}^\infty a_k \varphi_k$ は H において収束する。

(2) (1) で X は閉であるから $\sum_{k=1}^\infty a_k \varphi_k \in X$. よって “ $\supset$ ” がわかった。逆に $u \in X$ とすると、 $v_n \in \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ が存在して $\|u - v_n\| \rightarrow 0$. 命題 4.5(3) より $u_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$, $c_k = (u, \varphi_k)$ とすると $\|u - u_n\| \leq \|u - v_n\| \rightarrow 0$ で Bessel の不等式より $\{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{N})$ であるから $u \in$ (右辺) が従う。

(3) 与式右辺の収束は (2) の後半同様 Bessel の不等式による。 $u \in H$ に対して $(u - \sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k, \varphi_j) = (u, \varphi_j) - \sum_{k=1}^\infty c_k (\varphi_k, \varphi_j) = c_j - c_j = 0$. よって、 $u - \sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k \perp X$ となるから定理 4.3 の直交分解の一意性より結論を得る。 $\square$

定理 4.7 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を H の正規直交系、 X を $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ の張る閉部分空間とする。このとき、次の五つの条件 (a)–(e) は同値である。

- (a) $H = X$.
- (b) $u = \sum_{n=1}^\infty (u, \varphi_n) \varphi_n$, $\forall u \in H$.
- (c) (**Parseval の等式**) $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |(u, \varphi_n)|^2$, $\forall u \in H$.
- (d) $(u, v) = \sum_{n=1}^\infty (u, \varphi_n) (v, \varphi_n)$, $\forall u, v \in H$. ただし、右辺は絶対収束。
- (e) $(u, \varphi_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ならば $u = 0$ である。

証明: (a) $\Rightarrow$ (b): 命題 4.6(3) より明らか。 (b) $\Rightarrow$ (d), (d) $\Rightarrow$ (c), (c) $\Rightarrow$ (e): 明らか。
(e) $\Rightarrow$ (a): 仮定より $X^\perp = \{0\}$ であるから定理 4.3 より $H = X \oplus X^\perp = X$. $\square$

定義 4.5 H の直交系 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が定理 4.7(e) を満たすとき、直交系 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は**完全** (complete) であるという。特に、 $\{\varphi_k\}$ が正規直交系であれば、定理 4.7 のいずれかを満たせば完全である。

定理 4.8 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を H における直交系とする。任意の $u \in H$ と $\varepsilon > 0$ に対して $\{\varphi_k\}$ の適当な一次結合 $\phi = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$ で $\|u - \phi\| < \varepsilon$ となるものが存在すれば、 $\{\varphi_k\}$ は完全である。

証明: $\{\varphi_k\}$ が完全ではないとすると、 $(u, \varphi_n) = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) なる $0 \neq u \in H$ が存在する。このとき $\|u\| > 0$ より、仮定から $\|u - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k\| < \|u\|/2$ なる $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ が存在する。このとき、Schwarz の不等式により

$$\left| \left(u, u - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right) \right| \leq \|u\| \left\| u - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right\| < \frac{\|u\|^2}{2}$$

であるが、一方 $(u, \varphi_n) = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) より

$$\left| \left(u, u - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right) \right| = \left| \|u\|^2 - \overline{a_k} \sum_{k=1}^n (u, \varphi_k) \right| = \|u\|^2$$

となるから矛盾である。 $\square$

系 4.9 $-\infty < a < b < \infty$ とし、 $\{\varphi_n\}$ を $L^2(a, b)$ における直交系とする。このとき、閉区間 $[a, b]$ で連続で $f(a) = f(b)$ なる任意の関数 f が $\{\varphi_n\}$ の一次結合で一様に近似されるならば $\{\varphi_n\}$ は $L^2(a, b)$ において完全である。

証明: $\{f \in C[a, b]; f(a) = f(b)\}$ が $L^2(a, b)$ で稠密であることは定理 3.2 で $x = a, b$ の近傍で関数を修正することで得られる。これより結論は定理 4.8 から従う。 $\square$

定理 4.10 関数系 $S = \{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\}$ は $L^2(-\pi, \pi)$ において完全である。

証明: 系 4.9 より、任意の $f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)$ が、 S に属する関数の一次結合で一様に近似されることを示せばよい。ここで、 ρ_δ を軟化子 (cf. (3.10)) として、 f を周期 2π の $\mathbb{R}$ 上の連続関数として拡張し $f * \rho_\delta$ を考えると、定理 3.9 の証明と同様に $\|f * \rho_\delta - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($\delta \downarrow 0$) が従う。よって、 $f * \rho_\delta$ は C^∞ -級であるから、次の定理 4.11 を示せば証明は完了する。 $\square$

定理 4.11 $1/2 < \alpha \leq 1$ とする。 $f \in C(\mathbb{R})$ が周期 2π をもち一様に α -Hölder 連続:

$$\exists M < \infty \text{ such that } |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

であれば、 $\|s_N[f] - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) となる。ここで、

$$s_N[f](x) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ikx}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (4.4)$$

とする。

証明: Dirichlet 核 $D_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{ikx}$ を導入する。このとき

$$\begin{aligned} s_N[f](x) &= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} e^{ikx} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x-t) dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

に注意する。一方、 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$ であり、

$$D_N(t) = e^{-iNx} \sum_{k=0}^{2N} e^{ikt} = e^{-iNt} \cdot \frac{1 - e^{i(2N+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}$$

となるから $g(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin \frac{t}{2}}$ ($t \neq 0$), $= 0$ ($t = 0$) とおくと、

$$\begin{aligned} s_N[f](x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) (f(x-t) - f(x)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(N + \frac{1}{2})t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ g(t) \cos \frac{1}{2}t \right\} \sin Nt dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ g(t) \sin \frac{1}{2}t \right\} \cos Nt dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

よって、 $g \in L^2(-\pi, \pi)$ がわかれば $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin Nt\}_{N \in \mathbb{N}}, \{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos Nt\}_{N \in \mathbb{N}}$ がともに $L^2(-\pi, \pi)$ の正規直交系であることを Bessel の不等式と合わせれば (4.6) の右辺の各項は 0 に収束することがわかる。ここで、 $|\sin \frac{t}{2}| \geq \frac{|t|}{4}$ より $|g(t)| \leq 4M|t|^{\alpha-1}$. 今 $2(\alpha-1) > -1$ より $\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt < \infty$ となる。以上より、各 $x \in [-\pi, \pi]$ で $s_N[f](x) \rightarrow f(x)$ がわかった。

次に、 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)| < \infty$ を示す。これより Weierstrass の M -test から (4.4) の収束が一樣収束であることが従う。 $g(x) = f(x-h) - f(x+h)$ とおくと

$$\begin{aligned} c_k(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \{e^{-ik(x-h)} - e^{-ik(x+h)}\} dx \\ &= c_k(f)(e^{ikh} - e^{-ikh}) = c_k(f)2i \sin kh. \end{aligned}$$

よって、Bessel の不等式と f の Hölder 連続性により

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)2i \sin kh|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \leq 4M^2|h|^{2\alpha}.$$

$n = 0, 1, \dots$ とする。 $2^n \leq |k| \leq 2^{n+1}$ に対して $h = 2^{-n-2}\pi$ とすると $\frac{\pi}{4} \leq kh \leq \frac{\pi}{2}$ より $|\sin kh| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ により

$$\sum_{2^n \leq |k| < 2^{n+1}} |c_k(f)|^2 \leq M^2 \pi^{2\alpha} 2^{-2n\alpha-2\alpha+1}$$

であるから Schwarz の不等式より

$$\sum_{2^n \leq |k| < 2^{n+1}} |c_k(f)| \leq \left(\sum_{2^n \leq |k| < 2^{n+1}} |c_k(f)|^2 \right)^{1/2} \cdot (2^n)^{1/2} \leq M \pi^\alpha 2^{-(\alpha-\frac{1}{2})n + \frac{1}{2} - \alpha}$$

となり、 $\alpha > \frac{1}{2}$ より $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)| \leq |c_0(f)| + \sum_{n=0}^{\infty} M \pi^\alpha 2^{-(\alpha-\frac{1}{2})n} < \infty$ を得る。 $\square$

注意 4.1 $f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)$ であっても $s_N[f]$ が発散することがある。1 点での例は *du Bois-Reymond (1876)* により、*Kahn, Katznelson (1965)* により $\forall x \in [\pi, \pi) \cap \mathbb{Q}$ に対し $s_N[f](x)$ が発散する場合が調べられている。また、*Kolmogorov (1923)* により $f \in L^1(-\pi, \pi)$ であるがほとんど至るところ $s_N[f]$ が発散する例も知られている。

次の系は digital sampling で用いられる基本定理 (定理 4.20) の証明の基礎となる。

系 4.12 (Poisson の和公式) $f \in C^1(\mathbb{R})$ に対して $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+2n\pi), \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(t+2n\pi)$ が $t \in \mathbb{R}$ 上一様に絶対収束するとき、次が成立する。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2n\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} f(t) dt. \quad (4.7)$$

証明: 仮定より $\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+2n\pi)$ は周期 2π をもつ C^1 -級関数なので定理 4.11 より

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\varphi) e^{ikt} \quad (4.8)$$

となる。ここで、仮定より φ の定義式の右辺の級数は絶対一様収束するので項別積分でき

$$\begin{aligned} c_k(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t) dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t+2j\pi) dt \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+2j\pi}^{\pi+2j\pi} e^{-ik(t-2j\pi)} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} f(t) dt. \end{aligned}$$

最後の等号は $e^{ik2j\pi} = 1$ による。以上より、(4.8) で $t = 0$ とおくことで (4.7) を得る。 $\square$

例 4.3 定理 4.10 と定理 4.7 の Parseval の等式を組み合わせて

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right|^2$$

を得る。これを関数 $f(t) = t, t^2, |t|$ に用いることでそれぞれ

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

が従う。例えば、(1) は $\int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} dt = \frac{2i\pi(-1)^n}{n}, \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3}\pi^3$ より従う。

その他、Fourier 級数に詳しい和書として次をあげておく。

高橋陽一郎: 実関数と Fourier 解析 1, 2, 岩波書店.

谷島賢二: 物理数学 東京大学出版.

例 4.4 例 4.2 で挙げた、Legendre の多項式、Hermite の多項式、Laguerre の多項式もそれぞれ $L^2(-1, 1), L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx), L^2((0, \infty), e^{-x} dx)$ における完全直交系である。これらは定理 4.8 で Weierstrass の多項式近似定理 (問 3.7, ここでは $d = 1$ の場合) より任意の連続関数が多項式で近似できることを用いて証明できる。(P_n, H_n, L_n はすべて n 次多項式であることに注意せよ。) 詳しい証明は伊藤清三: ルベグ積分入門 裳華房を参照せよ。

4.3 Fourier 変換

Fourier 級数の理論により $f \in L^2(-L, L)$ ($L > 0$) に対して

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\pi \frac{k}{L} t} dt \cdot e^{i\pi \frac{k}{L} x} \quad (4.9)$$

が成立する。(右辺は $L^2(-L, L)$ での収束。) ここで、 $\xi_k = \frac{k}{L}\pi, \Delta\xi = \frac{\pi}{L}$ とおくと、

$$((4.9) \text{ の右辺}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\xi_k t} dt \cdot e^{i\xi_k x} \Delta\xi$$

となり、 $L \rightarrow \infty$ とすれば $|\Delta\xi| \rightarrow 0$ より

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) d\xi \quad (4.10)$$

が期待される。ただし、 $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対しては右辺の被積分関数の存在や積分の存在は一般には保証されない。そこで、まず $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対して次のように定義する。

定義 4.6 $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ の **Fourier 変換** $\hat{u} = \mathcal{F}u$, **共役 Fourier 変換** $\check{u} = \mathcal{F}^*u$ を

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad \check{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \quad (4.11)$$

と定義する。(式 (4.10) より $\mathcal{F}^* \mathcal{F} f = f$ が成り立つことが期待されるので、 $\check{u} = \mathcal{F}^*u$ を **Fourier 逆変換** ともいう。)

明らかに $\hat{u}(\xi) = \check{u}(-\xi)$ であり、 $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ で $\|\hat{u}\|_\infty \leq (2\pi)^{-d/2} \|u\|_1$ が成立する。ただし、ここで $\|\cdot\|_p$ は $L^p(\mathbb{R}^d)$ のノルムを表すものとする。これより $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ は $L^1(\mathbb{R}^d)$ から $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ への線形作用素であることがわかる。

定理 4.13 (Riemann-Lebesgue) $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ のとき、 $\hat{u} \in \hat{C}_\infty(\mathbb{R})$. 即ち、 $\hat{u}$ は連続で $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \hat{u}(x) = 0$ となる。

証明: $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ とすると、 $|e^{-ix \cdot \xi} - e^{-ix \cdot \eta}| \leq 2$ で $\lim_{\xi \rightarrow \eta} |e^{-ix \cdot \xi} - e^{-ix \cdot \eta}| = 0$ より Lebesgue の優収束定理より

$$|\hat{u}(\xi) - \hat{u}(\eta)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-ix \cdot \xi} - e^{-ix \cdot \eta}| |u(x)| dx \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow \eta).$$

従って $\hat{u}$ は連続。次に $\varepsilon > 0$ を任意に取っておく。定理 3.9 より $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ が存在して $\|f - u\|_1 < \varepsilon/2$. このとき定義より $\|\hat{f} - \hat{u}\|_\infty < \varepsilon/2$ に注意する。 $\Delta_x = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ とおくと、部分積分により

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} (\Delta_x f)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta_x e^{-ix \cdot \xi}) f(x) dx = -|\xi|^2 (2\pi)^{d/2} \hat{f}(\xi).$$

よって、 $(2\pi)^{d/2} |\hat{f}(\xi)| \leq \|\Delta_x f\|_1 / |\xi|^2$ となるから、ある M が存在して $|\xi| > M$ ならば $|\hat{f}(\xi)| < \varepsilon/2$. 以上より、 $|\hat{u}(\xi)| \leq |\hat{u}(\xi) - \hat{f}(\xi)| + |\hat{f}(\xi)| < \varepsilon$ を得る。□

例 4.5 (Fourier 変換の例) 計算は *Cauchy* の積分公式や留数定理の単純な応用なので演習問題とする。

- (a) $K_t(x) = (2\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$, $x \in \mathbb{R}^d, t > 0$, のとき、 $\widehat{K_t}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} e^{-t|\xi|^2/2}$ である。
(b) $f_a(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$, $x \in \mathbb{R}, a > 0$, のとき、 $\widehat{f_a}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$ である。

定理 4.14 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ のとき、 $\widehat{f * g}(\xi) = (2\pi)^{d/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

証明: Young の不等式 (命題 3.6) より $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に注意する。これより Fubini の定理を用いて積分の順序交換し、変数変換 $x \mapsto x + y$ を行なえば

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-ix \cdot \xi} \left(\int f(x - y) g(y) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \left(\int e^{-i(x+y) \cdot \xi} f(x) g(y) dx \right) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \cdot \int e^{-iy \cdot \xi} g(y) dy = (2\pi)^{d/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \quad \square \end{aligned}$$

定理 4.15 $f, \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ のとき $\mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = f$ a.e., 即ち (4.10) が a.e. で成立する。

証明: 例 4.5(a) の $K_t(x)$ に対して $\mathcal{F}K_t(\xi) = (2\pi)^{-d/2} e^{-t|\xi|^2/2} = t^{-d/2} K_{1/t}(\xi)$ となるから、

$$(\mathcal{F}^* \mathcal{F}K_t)(x) = t^{-d/2} \mathcal{F}^* K_{1/t}(x) = t^{-d/2} \mathcal{F}K_{1/t}(-x) = K_t(x) \quad (4.12)$$

となることに注意する。これと Fubini の定理により

$$\begin{aligned} (f * K_t)(x) &= [f * (\mathcal{F}^* \mathcal{F}K_t)](x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int f(x - y) \left(\int e^{iy \cdot \xi} (\mathcal{F}K_t)(\xi) d\xi \right) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{ix \cdot \xi} (\mathcal{F}K_t)(\xi) \left(\int e^{-i(x-y) \cdot \xi} f(x - y) dy \right) d\xi \\ &= \int e^{ix \cdot \xi} (\mathcal{F}K_t)(\xi) (\mathcal{F}f)(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.13)$$

を得る。ここで、定理 3.9 の証明と同様にして $\|K_t * f - f\|_1 \rightarrow 0$ ($t \downarrow 0$) を得ることに注意する (cf. 問 3.5(3))。これより、必要なら部分列をとって $K_{t_n} * f$ が f へ a.e. に収束するようにできる。一方、 $\mathcal{F}K_t(\xi) = (2\pi)^{-d/2} e^{-t|\xi|^2/2} \uparrow (2\pi)^{-d/2}$ ($t \downarrow 0$) と $|e^{ix \cdot \xi} (\mathcal{F}K_t)(\xi) (\mathcal{F}f)(\xi)| \leq (2\pi)^{-d/2} |(\mathcal{F}f)(\xi)|$ で $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ であるから Lebesgue の優収束定理が適応でき、

$$(4.13) \text{ の右辺 } \rightarrow (2\pi)^{-d/2} \int e^{ix \cdot \xi} \mathcal{F}f(\xi) d\xi = \mathcal{F}^* \mathcal{F}f(x)$$

となる。よって、 $\mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = f$ a.e. を得る。 $\square$

定理 4.16 $f, \mathcal{F}f, g, \mathcal{F}g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ のとき次が成立する。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi) \overline{\mathcal{F}g(\xi)} d\xi \quad (4.14)$$

証明: 仮定と定理 4.15 より $f = \mathcal{F}^* \mathcal{F} f, \mathcal{F} f \in \widehat{C}_\infty(\mathbb{R}^d)$ より (4.14) の両辺の積分は定義できることに注意する。よって、定理 4.15 と Fubini の定理を用いることにより

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left((2\pi)^{-d/2} \int e^{ix \cdot \xi} \mathcal{F} f(\xi) d\xi \right) \overline{g(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F} f(\xi) \left((2\pi)^{-d/2} \int e^{ix \cdot \xi} \overline{g(x)} dx \right) d\xi = (\text{右辺}). \quad \square \end{aligned}$$

次に $f, \mathcal{F} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ となる関数のクラスとして急減少関数のなす空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を導入する¹⁹。以下、 $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$ と書く。 $\langle x \rangle \sim 1 + |x|$ ($|x| \rightarrow \infty$) であるが $\langle x \rangle$ は $1 + |x|$ と違って滑らかであることに注意する。また、特に断らない限り α, β, γ は多重指数とする。

定義 4.7 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ は任意の $N \in \mathbb{N}$ と多重指数 α に対し $\langle x \rangle |\partial^\alpha u(x)|$ が有界であるとき**急減少** (*rapidly decreasing*) と呼ぶ。急減少な関数全体のなす空間を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ と書く。 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して、

$$p_l(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \langle x \rangle^l \sum_{|\alpha| \leq l} |\partial^\alpha u(x)|, \quad l = 0, 1, \dots,$$

と定める。ただし、多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ に対して $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ と書く。 $u_n, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ($n \in \mathbb{N}$) が、各 $l \in \mathbb{N}$ について $p_l(u_n - u) \rightarrow 0$ を満たすとき、 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ において $\{u_n\}$ は u に収束するといひ、 $u_n \xrightarrow{\mathcal{S}} u$ と書く。

注意 4.2 (1) $p = p_l$ は $p(u) \geq 0, p(u + v) \leq p(u) + p(v), p(cu) = |c|p(u)$ ($c \in \mathbb{C}$) を満たす。これらの性質を満たす p を**セミノルム** (*semi-norm*) という。

(2) $d(u, v) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \min\{1, p_l(u - v)\}$ と定義する。このとき、 d は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の距離で、 $u_n \xrightarrow{\mathcal{S}} u$ であることと $d(u_n, u) \rightarrow 0$ であることは同値である。また、 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), d)$ は完備な距離空間になる。

補題 4.17 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は線形空間で次を満たす:

- (a) 任意の α, m に対して $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ni u \mapsto \langle x \rangle^m \partial^\alpha u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は連続である。
- (b) $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ なら任意の $m \in \mathbb{N}, \alpha$ に対して $\langle x \rangle^m \partial^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p \leq \infty$.
- (c) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は $L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p < \infty$, の稠密部分集合である。
- (d) $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ のとき $u * v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

証明: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ が線形空間であることは明らか。

(a) 多重指数 γ と $m \in \mathbb{Z}$ に対して、定数 $C_{m, \gamma}$ が存在して $|\partial^\gamma \langle x \rangle^m| \leq C_{m, \gamma} \langle x \rangle^{m-|\gamma|}$ となることに注意する。これより Leibniz の公式により

$$\begin{aligned} p_l(\langle x \rangle^m \partial^\alpha u) &= \sup \langle x \rangle^l \sum_{|\beta| \leq l} |\partial^\beta (\langle x \rangle^m \partial^\alpha u)| \\ &= \sup \langle x \rangle^l \sum_{|\beta| \leq l} \left| \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} (\partial^\gamma \langle x \rangle^m) (\partial^{\alpha+\beta-\gamma} u) \right| \\ &\leq C \sup \langle x \rangle^{l+m} \sum_{|\gamma| \leq l+|\alpha|} |\partial^\gamma u| \leq C p_{l+\max\{|\alpha|, m\}}(u). \end{aligned}$$

¹⁹ この講義の残りの部分では $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の位相に関する議論は使わない。しかし、Schwartz 超関数 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の Fourier 変換を議論する際には必要となる事柄である。このことを考慮し位相に関する議論も少しであるが行なうこととした。

ただし、 $(\beta) = \prod_{j=1}^d (\beta_j)$ とする。これから、 $u_n \xrightarrow{\mathcal{S}} u$ なら $\forall l \in \mathbb{N}$ に対して

$$p_l(\langle x \rangle^m \partial^\alpha u_n - \langle x \rangle^m \partial^\alpha u) \leq C p_{l+\max\{|\alpha|, m\}}(u_n - u) \rightarrow 0$$

となり、 $\langle x \rangle^m \partial^\alpha u_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \langle x \rangle^m \partial^\alpha u$, 即ち、 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ni u \mapsto \langle x \rangle^m \partial^\alpha u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は連続である。

(b) $|\langle x \rangle^m \partial^\alpha u| \leq \langle x \rangle^{-(d+1)} p_{d+1+\max\{m, |\alpha|\}}(u)$ と $\int |\langle x \rangle^{-(d+1)}|^p dx < \infty$, $p \geq 1$ より明らか。

(c) $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ だから定理 3.9 より従う。

(d) $|x|^2 \leq 2(|x-y|^2 + |y|^2)$ より $\langle x \rangle \leq \sqrt{2} \langle x-y \rangle \langle y \rangle$ であるから

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^l |\partial^\alpha(u * v)| &= \langle x \rangle^l \left| \int u(y) \partial_x^\alpha v(x-y) dy \right| \\ &\leq 2^{l/2} \int \langle y \rangle^{-d-1} \langle y \rangle^{l+d+1} |u(y)| \langle x-y \rangle^l |\partial_x^\alpha v(x-y)| dy \\ &\leq 2^{l/2} p_{l+d+1}(u) p_{\max\{l, |\alpha|\}}(v) \int \langle y \rangle^{-d-1} dy. \end{aligned}$$

よって、 $u * v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ がわかった。 $\square$

定理 4.18 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\mathcal{F}f, \mathcal{F}^*f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ で、次が成立する。

(a) $\mathcal{F}^* \mathcal{F}f = \mathcal{F} \mathcal{F}^*f = f$.

(b) $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi) \overline{\mathcal{F}g(\xi)} d\xi$.

(c) $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}f(\xi) \mathcal{F}g(\xi)$, $(\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \mathcal{F}(fg)(\xi)$.

(d) $\partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f)(\xi)$, $(i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) = (\mathcal{F} \partial^\alpha f)(\xi)$.

ただし、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$ に対して $x^\alpha = \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j}$ とする。

証明: 補題 4.17 (c) より微分と積分の交換ができるので

$$\begin{aligned} \partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-d/2} \int (\partial_\xi^\alpha e^{-ix \cdot \xi}) f(x) dx = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f)(\xi), \\ (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int (i\xi)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int (-1)^\alpha (\partial_x^\alpha e^{-ix \cdot \xi}) f(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-ix \cdot \xi} \partial_x^\alpha f(x) dx = \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) \end{aligned}$$

より (d) の第 1 式は従う。但し、最後の行の第一の等号は部分積分による。従って、

$$(2\pi)^{d/2} |\xi^\beta \partial_\xi^\alpha \mathcal{F}f(\xi)| = \left| \int e^{-ix \cdot \xi} \partial^\beta \{(-ix)^\alpha f(x)\} dx \right| \leq p_{d+1+|\beta|}((-ix)^\alpha f) \int \langle \xi \rangle^{-d-1} d\xi$$

となるから $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ となる。また、 $\mathcal{F}^*f(x) = \mathcal{F}f(-x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ となる。これより、

(a), (b) と (c) の前半はそれぞれ定理 4.15, 定理 4.16, 定理 4.14 から従う。(c) の後半は、(a) と (c) の前半より次のように変形できるからである。

$$(\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g) = \mathcal{F} \mathcal{F}^*((\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g)) = (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}((\mathcal{F}^* \mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}^* \mathcal{F}g)) = (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(fg). \quad \square$$

では、 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ の場合の Fourier 変換にもとる。

定理 4.19 (Plancherel) $\mathcal{F}, \mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の unitary 作用素で、即ち、 $\|\mathcal{F}u\|_2 = \|\mathcal{F}^*u\|_2 = \|u\|_2$ ($u \in L^2(\mathbb{R}^d)$) を満たす作用素に拡張され、 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上 $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ が成立する。特に、 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して (4.14) が成立する。(この式を Parseval の等式という。)

証明: 補題 4.17 (c) でみたように、 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密であるので、 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を $\|\varphi_n - f\|_2 \rightarrow 0$ ととる。定理 4.18(b) より

$$\|\mathcal{F}\varphi_m - \mathcal{F}\varphi_n\|_2 = \|\mathcal{F}(\varphi_m - \varphi_n)\|_2 = \|\varphi_m - \varphi_n\|_2 \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

となるから、 $\{\mathcal{F}\varphi_n\}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ の Cauchy 列となる。 $L^2(\mathbb{R}^d)$ は完備であるから、 $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ が存在して $\|\mathcal{F}\varphi_n - g\|_2 \rightarrow 0$ 。このとき、 $\mathcal{F}f = g$ と定義する。 $\mathcal{F}f$ が近似列 $\{\varphi_n\}$ の取り方によらないことは容易にわかる。

残りの部分は同様に $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を $\|\varphi_n - f\|_2, \|\psi_n - g\|_2 \rightarrow 0$ ととると、 $\mathcal{F}^*\mathcal{F}\varphi_n = \varphi_n$ より $n \rightarrow \infty$ として $\mathcal{F}^*\mathcal{F}f = f$ a.e. を、(4.14) が $f = \varphi_n, g = \psi_n$ のとき成立することより $n \rightarrow \infty$ として Parseval の等式 (4.14) を得る。□

注意 4.3 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対してその Fourier 変換 $\mathcal{F}f$ は式 (4.11) で定義されているわけではないことを改めて注意しておく。(4.11) が定義できるような関数からなる近似列の L^2 -ノルムの極限として定義されたものである。実際、 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ならば $f1_{[-L,L]^d} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ であるから

$$\mathcal{F}f(\xi) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{[-L,L]^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

として定義することも出来る。ここで、l.i.m. は “limit in the mean (平均収束)”, 即ち、 L^2 -ノルムによる極限を表す (cf. [I] p.225)。

4.4 Fourier 変換の応用

この節では Fourier 変換の理論の応用を紹介する。標準的なものとしては微分方程式への応用であろうが、ここでは computer tomography と digital sampling の2つの身近な利用法について解説する²⁰。

Computer Tomography (計算機断層撮影):

試料の X 線透過率を $f = f(x, y)$ であるとする。ここでは f が大きいところでは、X 線が多く透過するため濃い影となって写る。逆に、 f が小さいところでは、X 線が少なく透過するため淡く写る。我々が試料を損傷することなく得ることが出来る情報は、試料をある方向から撮影した透過率を積分した情報のみである。例えば、X 線カメラを y 軸上に設置し、 x 軸上に試料をおいて撮影したときに得られるデータは

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

である。実は Fourier 変換の性質 (定理 4.18(a)) よりあらゆる方向から試料を撮影することで X 線透過率を $f = f(x, y)$ を復元することができる²¹。

²⁰この節の内容は 杉山健一: フーリエ解析講義 理論と応用, 講談社,

新井仁之: フーリエ解析と関数解析学, 倍風館 を参照しました。

²¹この技術を実行に実現させることにより Cormack と Hounsfield は、1979 年にノーベル医学・生理学賞

以下、 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ としてその方法を説明する。

1. x 軸とのなす角 θ である直線 u への積分射影像 (台座を θ だけ傾けて撮影するか、または、カメラを $-\theta$ だけ軸から傾けて撮影する) は

$$(Rf)(u, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) dv, \quad u \in \mathbb{R}, \theta \in [-\pi, \pi] \quad (4.15)$$

となる。これは回転移動に関する変換が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ であることによる。この数値は撮影によるデータとして得られる量である。(4.15) の変換を Radon 変換という。

2. では (4.15) の数値から元の関数 $f(x, y)$ を求める方法を考えよう。天下りのではあるが $Rf(u, \theta)$ を u について Fourier 変換し変数変換すると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u(Rf)(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) e^{-iru} dv du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} dx dy. \end{aligned}$$

ここで、 $\xi = r \cos \theta, \eta = r \sin \theta$ とすると上式の右辺は $f(x, y)$ の Fourier 変換そのものである: $\mathcal{F}_u(Rf)(r, \theta) = \mathcal{F}f(\xi, \eta)$. よって、 $f = \mathcal{F}^* \mathcal{F}f$ であるから

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi, \eta) e^{i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{F}_u(Rf)(r, \theta) e^{i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)} |r| d\theta dr. \end{aligned}$$

最後の等号は $\xi = r \cos \theta, \eta = r \sin \theta$ との変換を用いた。これより、(4.15) から $f(x, y)$ が復元されることがわかる。 $\square$

Digital Sampling:

関数 $f = f(x)$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}f$ がある有限区間 $[-l, l]$ の外側ですべて 0 を満たすとき、 f を **帯域制限関数** という。 $\mathcal{F}f(\xi)$ は、 f を構成する角周波数 ξ の関数 $e^{i\xi x}$ がどのくらい含まれているかを表す量であるから、帯域制限関数は $|\xi| > l$ なる角周波数成分を含まない関数ということになる。

このような帯域制限関数 $f(x)$ が与えられたとき、実はある一定間隔で f の値をサンプルとしてとっておけば、そのデータから f が完全に復元することができる。これは次の **Shannon のサンプリング定理** の主張を見ればわかる。ここでは簡単のため $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ として証明する。

定理 4.20 (Shannon-Whittaker-染谷の定理) $T > 0$ とする。 $f \in \mathcal{S}$ についてその Fourier 変換 $\mathcal{F}f$ が $\text{supp}(\mathcal{F}f) \subset [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ を満たすものとする。このとき、

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) h_T(x - nT), \quad x \in \mathbb{R}$$

が成り立つ。ただし、 $h_T(x) = \frac{\sin(\pi x/T)}{\pi x/T}$ とする。(この T を **サンプリング周期** という。)

を受賞した。もちろん、それには Fourier 変換の計算を実行する技術の発展など他からの貢献も大きい。

証明: Poisson の和公式 (系 4.12) の式 (4.7) を $f(\frac{T}{2\pi}x)e^{-i\xi\frac{T}{2\pi}x}$ に対して用いることで

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT)e^{-inT\xi} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} f\left(\frac{T}{2\pi}t\right) e^{-i\xi\frac{T}{2\pi}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi + \frac{2\pi}{T}k)x} f(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f\left(\xi + \frac{2\pi}{T}k\right)\end{aligned}$$

を得る。仮定より $\xi \in [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ であれば $k \neq 0$ に対して、 $\mathcal{F}f(\xi + \frac{2\pi}{T}k) = 0$ 。即ち、 $\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-1/2}T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT)e^{-inT\xi}$ 。一方、 $\mathcal{F}f(\xi) \equiv 0$ ($\xi \notin [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$) であるから、 $f = \mathcal{F}^* \mathcal{F}f$ より

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{ix\xi} T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT)e^{-inT\xi} d\xi \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{i(x-nT)\xi} d\xi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) h_T(x - nT). \quad \square\end{aligned}$$

注意 4.4 $\text{supp}(\mathcal{F}f) \not\subset [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ なる場合、サンプリング周期 T でとったデータから f が復元可能か調べてみよう。この場合、上記と同様な計算すると

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-i\frac{2\pi}{T}kx} f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) h_T(x - nT).$$

つまり、 $\sum_{k \neq 0} e^{-i\frac{2\pi}{T}kx} f(x)$ だけ歪みが生じ、サンプリング定理は成立しない。このような現象を**エイリアシング**という。

そこで、 f を $\mathcal{F}g \subset [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ なる関数 g によってある程度近似できないか考える。このような関数 g で f を最も良く L^2 近似しているものを見出してみよう。

Parseval の等式 (定理 4.19) より次の等式は明らかである:

$$\|f - g\|_2^2 = \int_{|\xi| > \pi/T} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| \leq \pi/T} |\mathcal{F}f(\xi) - \mathcal{F}g(\xi)|^2 d\xi.$$

従って、 $\|f - g\|_2$ を最小にする関数は $\mathcal{F}g = (\mathcal{F}f)1_{[-\pi/T, \pi/T]}$ であるから、定理 4.18(c) より

$$g = \mathcal{F}^*((\mathcal{F}f)1_{[-\pi/T, \pi/T]}) = (2\pi)^{1/2} f * \mathcal{F}^*1_{[-\pi/T, \pi/T]} = \frac{1}{T} f * h_T$$

が求める関数であることがわかる。