

71. 次の関数を積分せよ。

$$(1) \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \quad (2) (\arcsin x)^2 \quad (3) \frac{3x^5}{x^3-1} \quad (4) \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$(5) \frac{1}{1+3\sin^2 x} \quad (6) \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \quad (7) \sqrt{\frac{2-x}{x-1}} \quad (8) \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} \quad (9) \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}$$

72. 次の漸化式を導け。

$$(1) I_n = \int \cos^n x dx \text{ に関して、} I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \neq 0)$$

$$(2) I_n = \int x^n \cos x dx \text{ に関して、} I_n = nx^{n-1} \cos x + x^n \sin x - n(n-1)I_{n-2}.$$

73. 教科書 p.109 定理 5 を用いて関数  $F(x) = \int_a^b e^t f(x-t) dt$  について  $F'(x)$  を計算せよ。ただし、関数  $f$  は連続、 $a, b$  ( $a < b$ ) は定数とする。

74. 2次以下の(実係数)多項式全体の集合  $V$  は通常 addition, スカラー乗法に関して(抽象的)ベクトル空間になる。 $\{1, x, x^2\}$  がその一つの基底となる。次の演算  $S, T$  はこのベクトル空間の1次変換になるが、上記の基底に関する  $S, T$  の行列をそれぞれ求めよ。(cf. 教科書 p.83, 4).

$$(1) S : f(x) \mapsto \int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t) dt \quad (2) T : f(x) \mapsto e^x \frac{d}{dx} (e^{-x} f(x))$$

75. 次の行列の階数を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

76.  $(m, n)$  行列  $A, B$  に対し

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B$$

が成り立つことを示せ。また、等号の成立する例、しない例をそれぞれ一つづつ挙げよ。