基礎ゼミ　1組,2組　　2003年7月7日

65.　$f(x)$ を問題 **50** (1) のそれとする。自然数 n に対し $3n$ 次の多項式 $P_n(t)$ が存在して $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})f(x)$ $(x \neq 0)$, $f^{(n)}(0) = 0$ となることを示し、$f(x)$ は無限回微分可能であるが、Maclaurin 展開できないことを確認せよ。

66.　$\lim_{x\to\infty}\left\{\dfrac{x}{\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}} - P(x)\right\} = 0$　を満たす多項式 $P(x)$ を求めよ。

67.　次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^{\frac{1}{x}}$　　(2)　$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{\tan^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$　　(3)　$\lim_{x\to\pi/2-0}\dfrac{\log\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\tan x}$

(4)　$\lim_{x\to\infty}\left\{x - x^2\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right\}$　　(5)　$\lim_{x\to\infty}\log x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

68.　$V = M_3(\mathbf{R})$ を 3^2 次元の数ベクトル空間と見なすとき、次の行列 A_i $(i = 1, 2)$ と交換可能な行列の集合 $W_i = \{X \in V | XA_i = A_iX\}$ が V の部分空間になることを示し、その次元を求めよ。ただし、a, b, c はすべて異なる実数とする。

(1)　$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$　　(2)　$A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

69.　$\mathbf{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 が次のものであるとき、W_1+W_2 の次元および基底を求め、$realb^4 = W_1 \oplus W_2$ であるか調べよ。

(1)　$W_1 = \{x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$,
$W_2 = \{x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0\}$.

(2)　$W_1 = \{x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0\}$,
$W_2 = \{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\}$.

70.　V, W_1, W_2 を次のものとするとき、a)　$V = W_1 + W_2$　か、b)　その場合　$V = W_1 \oplus W_2$ か調べよ。

(1)　V: 3 次以下の実係数多項式全体, $W_1 = \left\{f \in V; \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0\right\}$, $W_2 =$ { 定数関数 }

(2)　$V = \mathbf{R}^4$, $W_1 = \{x_3 = x_4 = 0\}$, $W_2 = \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$

(3)　$V = M_n(\mathbf{R})$, $W_1 =$ { 上三角行列 }, $W_2 =$ { 下三角行列 }

(4)　$V = M_n(\mathbf{R})$, $W_1 =$ { 上三角行列 }, $W_2 =$ { 交代行列 }