60. 平均値の定理を用いて次を示せ。

(1) $\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2}$ $(-1 \le x \le 1)$ (2) $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & (x > 0) \\ -\pi/2 & (x < 0) \end{cases}$

61. 平均値の定理または Taylor の定理を用いて次を示せ。

(1) $f(x)$ が $(0, \infty)$ で微分可能のとき、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = \alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \{f(x+1) - f(x)\} = \alpha.$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$ ただし、$f(x)$ が点 a を含む区間で 2 回微分可能で $f''(x)$ が連続とする。

(3) $f(x)$ が点 a を含む区間で 3 回微分可能で $f'''(x)$ が連続とする。$f'''(a) \neq 0$ ならば、h に対し θ を $f(a+h) = f(a) + f'(a) + hf'(a) + \dfrac{1}{2!}f''(a+\theta h)$ で定めるとき、$\displaystyle\lim_{h\to 0} \theta = \frac{1}{3}.$

62. $[a, b]$ で $f''(x)$ が連続で、(a, b) で $f'''(x)$ が連続であるとき、次を証明せよ。

(1) $f(b) = f(a) + \dfrac{1}{2}(b-a)\{f'(a) + f'(b)\} - \dfrac{1}{12}(b-a)^3 f'''(c)$ なる $c \in (a, b)$ が存在する。

(2) $f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + \dfrac{1}{24}(b-a)^3 f'''(c)$ なる $c \in (a, b)$ が存在する。

63. Taylor の公式を用いて、e が無理数であることを示せ。(ヒント：$e = p/(q!)$ と表し、もし $q \ge 2$ なら $e/\{(q+1)!\} < 1/q!$ であることから矛盾を導け。)

64. ベクトル空間 $\mathbf{V}$ の基底 $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ に対し、$\mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\mathbf{e}_i$ $(1 \le j \le n)$ を満たす行列 $P = (p_{ij})$ を底の変換 $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 行列という。次で与えた、$\mathbf{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ に対し底の変換 $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 行列を求めよ。

(1) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3, \mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$

(2) $\mathbf{V} = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^3, \mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$

(3) $\mathbf{V} = \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \subset \mathbf{R}^4,$
$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(4) $\mathbf{V}$: 2 次以下の実係数多項式全体, $\mathcal{E} = \{3 - 4x - x^2, -2 + 2x + x^2, -2 + 3x + x^2\},$
$\mathcal{F} = \{1 + x + 2x^2, 2 - x - x^2, 1 + 2x + 3x^2\}$