

53. 次の関数の n 次導関数を求めよ。(ただし、 a, b は定数。)

(1) $\frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ (2) $e^x \cos x$ (3) $\sin^3 x$ (4) $x^{n-1} \log x$ (5) $x^{n-1} e^{1/x}$

54. 次の媒介変数表示の関数から d^2y/dx^2 を求めよ。

(1) $x = a \left(t + \frac{1}{t} \right), y = a \left(t - \frac{1}{t} \right)$ (2) $x = a \cos t, y = b \sin t$

55. $y = \arctan x$ に対し、 $\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)! \cos^n y \sin \left(ny + \frac{n\pi}{2} \right)$ ($n = 1, 2, \dots$) を示せ。

56. $y = \arctan x$ のとき、次を示せ。

(1) $(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$
 (2) $f^{(2m)}(0) = 0, f^{(2m+1)}(x) = (-1)^m (2m)!$ ((1) を用いてとけ。)

57. $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2/2} \right)$ に対し、以下を示せ。

(1) $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$
 (これより、 $H_n(x)$ が n 次多項式であることがわかる。これを Hermite 多項式と呼ぶ。)
 (2) $H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$
 (3) $H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0$ (Hermite の微分方程式)

58. $f(x)$ は微分可能とする。このとき、方程式 $f(x) = 0$ の隣り合う 2 解の間には方程式 $f'(x) = 0$ は実根が少なくとも 1 つもつことを Rolle の定理より示せ。

59. 以下の間に答えよ。

(1) (m, n) 実行列 A に対し次が \mathbf{R}^m または \mathbf{R}^n の部分ベクトル空間であることを示せ。
 (a) $\text{Im}(A) = \{ Ax \mid x \in \mathbf{R}^n \}$ (A の像) (b) $\text{Ker}(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid Ax = \mathbf{o} \}$ (A の核)
 (2) (m, n) 実行列 A の n コの縦ベクトルの中の 1 次独立な元の個数を $\text{rank } A$ で表す。
 このとき、(a) $\dim \text{Im}(A) = \text{rank } A$, (b) $\dim \text{Ker}(A) = n - \text{rank } A$ を示せ。

(3) \mathbf{R}^4 の部分空間 $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ に対し、

$\dim(W_1 \cap W_2), \dim(W_1 + W_2)$ を求めよ。