48. (1) $\mathbf{R}$ 上の連続な関数 $f(x)$ が $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ を満たせば $f(x)$ は最小値をもつことを示せ。

(2) $\mathbf{R}$ 上の連続な関数 $f(x)$ が $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ を満たし、かつ、$f(a) > 0$ となる $a \in \mathbf{R}$ が存在するとする。このとき、$f(x)$ は最大値をもつことを示せ。

49. 次の極限を求めよ。ただし、$a \neq 0$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{a}{x}\right)^{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^{1/x^2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$

50. 次の関数について、$f'_+(0), f'_-(0), f'(0)$ が存在するか。存在すればそれを求めよ。

(1) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$　(2) $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+1} & (x \geq 0) \\ ax^2 + bx + 1 & (x < 0) \end{cases}$　(ただし、a, b は定数。)

51. 次の関数の導関数を求めよ。[1]

(1) $\arccos(\sin x)$　(2) $\arcsin(\cos x)$　(3) $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x}$

(4) $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$　(5) $\arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

52. 以下の問に答えよ。

(1) $\mathbf{R}^n$ のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一次独立ならば、$\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{a}+\mathbf{c}$ も一次独立であることを示せ。また、$\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{a}-\mathbf{c}$ はどうか調べよ。

(2) $\mathbf{R}^3$ の部分ベクトル空間 $W_1 : 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0,\ W_2 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ を考える。W_1, W_2 の基底をそれぞれ一組求めよ。また、$W_1 + W_2$ および $W_1 \cap W_2$ を求めよ。

(3) $\mathbf{R}^3$ の原点を通る平面上に 2 組の基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ および $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ をとる。$\mathbf{b}_1 = c_{11}\mathbf{a}_1 + c_{12}\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2 = c_{21}\mathbf{a}_1 + c_{22}\mathbf{a}_2$ ち表すとき、行列 $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ は逆行列をもつことを示せ。

(4) $\mathbf{R}^3$ 上で各ベクトルを平面 $x + y + z = 0$ に関して対称の位置に写す。この変換を行列で表せ。

---

[1]教科書の記号と異なり、$\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$ をそれぞれ $\arcsin, \arccos, \arctan$ と表記する。問題 **45** も同様。