基礎ゼミ　1組,2組　　2003年6月2日

43.　次の関数の定義域および連続性を調べ、グラフをかけ。

$$f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \cdots + \frac{x}{(1+x)^n}\right)$$

44.　(1)　区間 I において $f(x)$ も $g(x)$ も連続とする。有理数 x に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つとき、I 上のすべての点 x に対しても $f(x) = g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　f が、すべての $x, y \in \mathbf{R}$ に対し $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たしかつ連続ならば、$f(x) = f(1)x$ $(x \in \mathbf{R})$ となることを示せ。

注意　(2) で f が連続でない場合、$f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たしかつ $f(x) = f(1)x$ を満たさない関数 f を構成できる。

45.　次の等式を示せ。

(1)　$\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{\pi}{2}$　　(2)　$2\arctan\dfrac{1}{3} + \arctan\dfrac{1}{7} = \dfrac{\pi}{4}$

46. (1)　$\mathbf{R}^2$ のベクトル $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ へ、$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ へ移す行列 A を求めよ。

(2)　$\mathbf{R}^2$ 上で各ベクトルを $\pi/3$ だけ原点のまわりに回転し、次いで直線 $y = x$ に関して対称の位置に写す。この変換を行列で表せ。

(3)　$\mathbf{R}^2$ 上で各ベクトルを $\pi/4$ だけ原点のまわりに回転し、次いで直線 $y = 2x$ に関して対称の位置に写す。この変換を行列で表せ。

(4)　$\mathbf{R}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ へ、$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ へ、$\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ へ移す行列を求めよ。

47.　(m,n) 行列 A に対し A の像を $\mathrm{Im}(A) = \{\, A\mathbf{x} \mid x \in \mathbf{K}^n \,\}$ で、A の核を $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$ で定める。次の行列 A の像と核を求めよ。ただし、$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ として解けばよい。

(1)　$A = \begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{pmatrix}$　　(2)　$A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 4 & 6\end{pmatrix}$　　(3)　$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$