基礎ゼミ　1組,2組　　2003年5月26日

35. (1) 関数 $f(x)$ が点 $x = x_0$ で連続であれば、$|f(x)|$ も点 $x = x_0$ で連続であることを示せ。

(2) 関数 $f(x), g(x)$ がともに点 $x = x_0$ で連続であれば、$\max\{f(x), g(x)\}$ も点 $x = x_0$ で連続であることを示せ。

36. 次の関数の連続性を調べよ。

(1) $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

37. n が奇数のとき方程式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ は少なくとも一つの実数解を持つことを示せ。

38. $\mathbf{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ が次の条件 $(*)$ を満たせば、$y = f(x)$ のグラフは直線 $y = x$ と必ず交わることを示せ。

$$(*) \qquad |f(x)| \leq a|x| + b$$

ただし、$0 < a < 1,\ b > 0$ は定数とする。

39. $(0, \infty)$ での方程式 $x\tan x = 1$ の解について次を示せ。

(1) 区間 $(n\pi, x\pi + \pi/2)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ に解が一つずつある。

(2) $(n\pi, x\pi + \pi/2)$ にある解を $x_n = n\pi + \alpha_n$ とおくと $\{\alpha_n\}$ は次を満たす。

(a) $\dfrac{\pi}{2} > \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_n > \cdots$　　(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

40. 区間 $(0, 1]$ において、最大値も最小値もとらない連続関数の例をあげよ。

41. ベクトル空間 V の元 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ に対し $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m = \mathbf{o}$ を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{K}$ が $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ 以外存在しないとき、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ は $\mathbf{K}$ 上で線形独立、そうでないとき線形従属という。ここで、$\mathbf{o}$ は V の零元、$\mathbf{K}$ は $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ を表すものとする。次の三つのベクトルが $\mathbf{C}$ 上で線形独立か調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

42. 行列 A が $A^2 = O$ を満たせば、$E + A$ は正則であることを示せ。