

29. $r \neq 1$ のとき等比級数の公式 $\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ の両辺を r について微分することにより、
 $\sum_{k=1}^n kr^{k-1} = \frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$ を示せ。また、 $\sum_{k=1}^n k^2 r^{k-1}$ はどうなるか考察せよ。

30. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\}$ を示せ。

また、一般に自然数 p に対し $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+p)}$ がどうなるか考察せよ。

31. 数列 $\{a_n\}$ に対し次の定数 c , $0 \leq c < 1$, の存在を仮定する。

$$\forall n \geq 2 \text{ に対し } |a_{n+1} - a_n| \leq c|a_n - a_{n-1}|$$

このとき、 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを証明せよ。

32. 次の数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示し $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n + 1} \quad (n \in \mathbf{N})$

(2) $a_1 \geq 0, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \quad (n \in \mathbf{N})$

(3) $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} \quad (n \geq 3)$

(ヒント : $a_n + \beta a_{n-1} = a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ を用いよ)

33. 次の級数の収束する x の範囲とその和を求めよ。

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}} \quad (a > 0)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (4^n - 2^n)x^{n-1}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

34. 次の空間 V が \mathbf{R} 上の線形空間であるか調べよ。

(1) $V = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3); 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \}$

(2) $V = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3); 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \}$

(3) V は $[0, 1]$ 上の連続関数 $f(x)$ で $f(0) = 0$ を満たすもの全体

(4) V は 2次正方行列 A でその行列式が 0 となるもの全体

(5) V は 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $a + d = 0$ となるもの全体