

22. 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $A^2 - (\text{tr } A)A + (\det A)E = 0$ を示せ。但し、 $\text{tr } A = a + d$ (行列 A のトレース), $\det A$ は A の行列式, E は単位行列を表す。

23. つぎの行列の n 乗を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

ヒント : (1) は問題 22 を用いよ。(2),(3) は $n = 2, 3, \dots$ の場合を計算し答えを予想し帰納法を用いよ。(4) については行列を A とし、 $B = A - aE$ とすると $B^3 = O$ 。 aE と B が交換可能であることを用いよ。

24. 次の極限值について存在すればその値を求め、存在しなければその理由を述べよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/4} - 1}{(1+2x)^{1/3} - (1-2x)^{1/3}}$ (3) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(\cos x)}{x - \frac{\pi}{2}}$
 (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x^2 - 1)}{\sin(x - 1)}$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x + x^2)^{1/x}$ (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x + 2x^2}\right)^x$
 (7) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{[x]}{x}$ (8) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{[x]}{x}$ (9) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + x - 2}{|x - 1|}$ (10) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + x - 2}{|x - 1|}$
 (11) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$ (12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 + 1})$

25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{-1/2} - (1-ax)}{x^2}$ が極限をもつように a を定め、極限を求めよ。

26. 次の極限を求めよ。但し、 $0 < a < b < c$ とする。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (a^x + b^x + c^x)^{1/x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a^x + b^x + c^x)^{1/x}$

27. 実数 x に対し $\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^n \right\}$ を求めよ。

28. $f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$ とおくと、 $f(x)$ は $x = 0$ でのみ連続で、 $x \neq 0$ なる点 x では不連続であることを示せ。

注 教科書の演習問題も解いて発表してください。