**基礎ゼミ　1 組,2 組**　　2003 年 4 月 21 日

**6.**　数列 $\{a_n\}$ が $\alpha$ に収束するとき次を示せ。

(1)　$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ が自然数の増加列のとき $\{a_{n_k}\}$ を $\{a_n\}$ の部分列という。$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ に対し $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ を示せ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ を示せ。(ヒント：**2** (2) を用いよ。)

(3)　$a_n > 0\ (n \geq 1)$ のとき $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$ を示せ。

**7.**　数列 $\{a_n\}$ が $\infty$ に発散するとき、$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ も $\infty$ に発散することを示せ。

**8.**　数列 $\{a_n\}$ に対し、$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \alpha$ を満たせば、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となることを示せ。

**9.**　一般項が次の式で与えられる数列の極限値を求めよ。

(1)　$\dfrac{\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$　　(2)　$\dfrac{\cos n\theta}{n}$　($\theta$ は定数)

(3)　$\dfrac{1}{n^3}\{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n\cdot(n+1)\}$　　(4)　$\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n$　　(5)　$\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(6)　$\dfrac{a^n}{n!}$　$(a \in \mathbf{R})$　　(7)　$\dfrac{n!}{n^n}$　　(8)　$(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$　　(9)　$\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$

**10.**　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3\sqrt{a_n}$ によって数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1)　$0 < a_n < 9$ を示せ。　　(2)　$\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。(ヒント：「有界な単調数列は収束する」ことを用いよ。)

**11.**　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ によって数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1)　$0 < a_n < 2$ を示せ。　　(2)　$\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。　(ヒント：「有界な単調数列は収束する」ことを用いよ。)

**12.**　$a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left({a_n}^2+2\right)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1)　$0 < a_1 < 1$ のとき $\{a_n\}$ が上に有界な単調増加数列であることを示し $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ を示せ。

(2)　$a_1 > 1$ の場合どうなるか考察せよ。(ヒント：$1 < a_1 < 2,\ a_1 > 2$ と分けて考えよ。)

**注　教科書の演習問題も解いて発表してください。**