

1. 次の不等式を満たす  $x$  の範囲を数直線上に図示せよ。

(1)  $|x - 1| \leq 3$       (2)  $|x - 1| \geq 2$  かつ  $|x| < 5$

2. (1)  $a, b \in \mathbf{R}$  に対し  $|a + b| \leq |a| + |b|$  を示せ。

(2) 上の不等式から  $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$  を示せ。

(3)  $a \in \mathbf{R}, M > 0$  に対し、 $|x - a| \leq M$  ならば  $|x| \leq M + |a|$  となることを証明せよ。

3. 次の集合はどのような集合か。

(例)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ 0, 1 - \frac{1}{n} \right]$       (解:  $[0, 1)$ , 証明は授業中に与える。)

(1)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ 1, 3 - \frac{1}{n} \right]$       (2)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n}, 1 \right]$       (3)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{n}, 1 \right]$

(4)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, 1 \right)$       (5)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{n}, n \right]$       (6)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left( 0, \frac{1}{n} \right]$

4. 次の集合  $A$  に対し、 $\sup A, \inf A, \max A, \min A$  があればそれを求めなければその理由を述べよ。

(1)  $A = \{ x \in \mathbf{R} \mid -1 < x \leq 2 \}$       (2)  $A = \{ x \in \mathbf{R} \mid |x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} \}$

(3)  $A = \{ x \in \mathbf{Q} \mid |x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} \}$       (4)  $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$

(5)  $A = \left\{ (-1)^{n+1} + \left( -\frac{1}{n} \right)^n \mid n \in \mathbf{N} \right\}$       (6)  $A = \left\{ n \sin \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$

5.  $A$  を開集合  $(0, \infty)$  に含まれる空でない部分集合とし

$$B = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in A \right\}$$

とおく。このとき、

$$\sup B = \frac{1}{\inf A}, \quad \inf B = \frac{1}{\sup A}$$

を証明せよ。ただし、 $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$  と約束する。

注 教科書の演習問題も解いて発表してください。