微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　テスト 5 回目　出題日 2003 年 2 月 4 日

- 解答用紙は裏面も使用してください。
  名前と学籍番号は提出するすべての解答用紙に記入してください。

1. 次の重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz \qquad (V:\ 0 \le x \le y \le z \le 1)$

(2) $\displaystyle\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^2} \qquad (V:\ x+y+z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$

(3) $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2+z^2)^2\,dx\,dy\,dz \qquad (V:\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0)$

(4) $\displaystyle\iiiint_V dx\,dy\,dz\,dw$

$(V:\ 0 \le x+y \le 1,\ 0 \le y+z \le 2,\ 0 \le x+z \le 3,\ 0 \le x+w \le 4)$

2. 球 $x^2+y^2+z^2 \le 1$ と円柱 $x^2+y^2 \le x$ の共通部分の体積 V を求めよ。

3. 次を計算せよ。

(1) 螺線 (らせん): $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ z = h\theta$ (a, h 正定数, $0 \le \theta \le 2\pi$) の長さ L を求めよ。

(2) ベクトル場 $\mathbf{A} = (-y, x, z)$ の螺線 $C:\ \mathbf{r}(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, h\theta)$ $0 \le \theta \le 2\pi$, $(a, h > 0)$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ を求めよ。

(3) 円周 $C:\ x^2+y^2 = 1$ (向きは反時計回りとする) に対し線積分 $\displaystyle\int_C y\,dx + x\,dy$ を求めよ。

(4) 円柱面 $x^2+y^2 = 1$ の円柱面 $x^2+z^2 = 1$ の内部にある部分の表面積 S を求めよ。

(5) 半球 $S:\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \ge 0$ に対し面積分 $\displaystyle\iint_S z\,dS$ を求めよ。

(6) ベクトル場 $\mathbf{A} = (x^2, y^2, z^2)$, 半球 $S:\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \ge 0$ とその外向きの単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ に対し面積分 $\displaystyle\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$ を求めよ。

ヒント: 定義に従って重積分に書き下し極座標変換せよ。
それを計算するとき $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^3\theta\,d\theta = 0$ に注意せよ。

連絡 2 月 7 日 (金)15:00 から答案用紙を返却するので、返却を希望する者は理学部複合棟 412 室まで受け取りに来ること。