微分積分学 AD II，数学序論演習 II　テスト 3 回目　出題日 2001 年 12 月 10 日

- 解答用紙は裏面も使用してください。
  名前と学籍番号は提出するすべての解答用紙に記入してください。

1. $F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$ に対し陰関数の定理を用いて、その陰関数 $y = f(x)$ ついて $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ。更に、$y = f(x)$ の極値を求めよ。

2. $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z + \mathrm{Arcsin}(xyz) = 0$ の定める陰関数 $z = f(x,y)$ について、偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ。

3. 関数 $xy + yz + zx = 2$ の表す曲面の点 $(1,0,2)$ における接平面を求めよ。また、この接平面に関して点 $(6,1,3)$ と対称な点の座標を求めよ。

4. 関数 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ について、その極値を求めよ。

5. $F(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$ のもとで、$f(x,y) = x$ の極値を求めよ。

(注) $E = \{(x,y) | x^2 + y^2 + xy = 1\}$ が有界閉集合であり、最大値・最小値をとりそこで極値になることは証明なしに用いてもかまわない。

6. xy-平面の正方形 $U = \{(x,y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$ は、写像 $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = x - 2y \end{cases}$ によって、uv-平面のどんな集合に写されるか図示し、その面積を求めよ。また、この変換が単射 (一対一) であることを示せ。

7. $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ のとき、Jacobian

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} \equiv \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}$$

を求めよ。