微分積分学 AD II，数学序論演習 II　テスト 2 回目　出題日 2001 年 11 月 26 日

- 解答用紙は裏面も使用してください。
  名前と学籍番号は提出するすべての解答用紙に記入してください。

1.　集合 $E = \{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ が開集合になることを示せ。

ヒント：集合 E が開集合であるとは任意の点 $\mathbf{p}=(a,b)\in E$ が E の内点、即ち、「$\forall\mathbf{p}\in E,\ \exists\varepsilon>0$ such that $U_\varepsilon(\mathbf{p})\subset E$」を示せばよい。ここで、$U_\varepsilon(\mathbf{p})$ は点 $\mathbf{p}$ の ε 近傍 $U_\varepsilon(\mathbf{p})=\{\,(x,y)\,|\,\|(x,y)-(a,b)\|<\varepsilon\,\}$ を表す。

2.　次の関数の原点における極限値が存在するか。するならばそれを求めよ。

(1)　$f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$　　(2)　$f(x,y)=xy\log(x^2+y^2)$

3.　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1)　$f(x,y)=\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{y}{x}$　　(2)　$f(x,y,z)=x^{\frac{1}{x+y+z}}$

4.　関数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\,\mathrm{Arctan}\left|\dfrac{y}{x}\right| & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ について $f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$ を求めよ。

5.　関数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ の原点における全微分可能性を調べよ。また、C^1 級であるか調べよ。

6.　$x=u\cos\alpha-v\sin\alpha,\ y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$ (α は定数) のとき、$z=f(x,y)$ に対して次が成り立つことを示せ。但し、$f(x,y)$ は C^2 級とする。

(1)　${z_x}^2+{z_y}^2={z_u}^2+{z_v}^2$　　(2)　$z_{xx}+z_{yy}=z_{uu}+z_{vv}$

7.　関数 $f(x,y)=e^x\cos y$ について $(0,0)$ の近くで $n=3$ における Taylor の公式を導け。また、このとき誤差の限界が $(|x|+|y|)^3e^{|x|}/6$ であることを示せ。

- 11 月 29 日 (金) は休講とし、次回の講義は 12 月 3 日 (火) とします。