微分積分学 AD II，数学序論演習 II　テスト 1 回目　出題日 2001 年 10 月 25 日

1.　次の正項級数の収束・発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

2.　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ が条件収束する α の範囲を求めよ。

3.　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束ならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ は絶対収束することを示せ。また、逆は成立しないことを例をあげて示せ。

4.　$f_n(x) = n^p x e^{-nx}$ とする。このとき、関数列 $\{f_n(x)\}$ が $I = [0, 1]$ 上で一様収束するような p の範囲を決定せよ。

5.　次で関数項級数が I 上で一様収束するか調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^3}{n^3 + x^3}$,　$I = [0, 1]$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$,　$I = [0, 1]$

6.　次のべき級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} x^n$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^{2^n}$

7.　等比級数の和の式 $\displaystyle\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ を用いて

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad (-1 < x \leq 1)$$

を導け。(これより、$\log 2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots$ がわかる。)

8.　$f(x)$ が区間 $[0, 1]$ で連続のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) n(1-x)^{n-1}\, dx = f(0)$ を示せ。

ヒント：積分範囲を 2 つに分けるとよい。$f(x)$ の一様連続性に注意せよ。