**微分積分学 AD II，数学序論演習 II**　　2003 年 2 月 4 日の試験の解答の要点[1]

**1** (1) (与式) $=\int_0^1 dz\int_0^z dy\int_0^y xyz\,dx=\int_0^1 dz\int_0^z \frac{1}{2}y^3z\,dy=\int_0^1\frac{1}{8}z^5\,dz=\frac{1}{48}$.

(2) (与式) $=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^2}=\cdots=\frac{3}{4}-\log 2$.

(3) $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$とすると、$\Omega=\{(r,\varphi,\theta)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$が$D$に面積0の集合を除いて一対一で写される。ところで$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\theta$より (与式) $=\iint_\Omega r^4r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^6\sin\theta\,dr=\cdots=\frac{2\pi}{7}$を得る.

(4) $s=x+y,\ t=y+z,\ u=x+z,\ v=x+w$とおく、即ち、

$$\begin{pmatrix}s\\t\\u\\v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

とおくと、$\frac{\partial(x,y,z,w)}{\partial(s,t,u,v)}=\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}=\frac{1}{2}$、$\Omega=\{\,(s,t,u,v)\,|\,0\le s\le 1, 0\le t\le 2, 0\le u\le 3, 0\le v\le 4\}$が$D$に写されるから、
$\iiiint_D dx\,dy\,dz\,dw=\iiiint_\Omega\left|\frac{\partial(x,y,z,w)}{\partial(s,t,u,v)}\right|ds\,dt\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_0^1 ds\int_0^2 dt\int_0^3 du\int_0^4 dv=12$.

**2** 教科書 p.214 例 16 そのものだから略。

**3** (1) $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(\theta)^2+y'(\theta)^2+z'(\theta)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+h^2}\,d\theta=2\pi\sqrt{a^2+h^2}$.

(2) $\int_C\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\Big\{-y(\theta)x'(\theta)+x(\theta)y'(\theta)+z(\theta)z'(\theta)\Big\}\,d\theta=\int_0^{2\pi}(a^2+h^2\theta)\,d\theta=2\pi(a^2+\pi h^2)$.

(3) $C:(x,y)=(\cos t,\sin t)\ 0\le t\le 2\pi$とできるから
(与式) $=\int_0^{2\pi}\{\sin t(-\sin t)+\cos t\cos t\}\,dt=0$.

(4) 対称性より$D: 0\le z\le 1, 0\le y+z\le$上で$x=\sqrt{1-z^2}$について考え 8 倍すればよい。
$S=8\iint_D\sqrt{1+{x_y}^2+{x_z}^2}\,dy\,dz=8\iint_D\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dy\,dz=8\int_0^1 dz\int_0^z\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dy$
$=8\int_0^1\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\,dz\overset{(*)}{=}8\int_0^1 dt=8$. ($\overset{(*)}{=}$ では$t=\sqrt{1-z^2}$と置換した。)

(5) $S:\ \mathbf{r}(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})\ ((x,y)\in D, D:\ x^2+y^2\le 1)$より$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}=(1,0,\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}})$, $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}=(0,1,\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}})$. よって、$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}=(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1)$. 以上より、
$\iint_S z\,dS=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\right\|\,dx\,dy=\iint_D dx\,dy=\pi$.

(6) $\mathbf{n}$と$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}=(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1)$の向きは同じだから、
$\iint_S\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_D\{x^2\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+y^2\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1-x^2-y^2\}\,dx\,dy$
$\overset{(*)}{=}\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\{\frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{1-r^2}+1-r^2\}r\,d\theta=2\pi\int_0^1(r-r^3)\,dr=\frac{\pi}{2}$.
($\overset{(*)}{=}$ では極座標を用い変換し、次の$=$では$\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta=0$を用いた。)

[**裏面に成績の連絡あり**]

[1]**注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。(今回掲示した解答には試験日と問題 **1** (3) に誤りがあった。) 配点は **3** (1), (2), (3) はそれぞれ 6,7,7 点、他は各 10 点で満点は 100 点である。**平均点は** $\mu=45.5$ **点、標準偏差は** $\sigma=16.8$ **でした。**

評価　解答用紙に記入してある ABCD は順に微分積分学 AD II, 数学序論演習 II の成績です。A は優, B は良, C は可, D は不可を表します。基準は 5 回の試験の合計点が 120 点以下は DD, 121 ～ 140 点は CC, 141 ～ 155 点は CB, 156 ～ 180 点は BB, 181 ～ 200 点は BA, 201 点以上は AA としました。(当初は CB の成績の学生が CC で、CC の成績をつけた学生は DD の予定でした。特に、可のついている学生は真剣に反省して勉強しなさい。)

勧告　合格したからと安心せず、約 2ヶ月の春休みの間しっかり勉強して来年以降の勉強に備えてください。特に微積に関しては 1 変数、2 変数の $\varepsilon$-$\delta$ 論法を勉強し直しておくことを強く勧めます。ここでの貯金は 2 年次以降に役立ちます。解析学序論, 幾何学序論, 解析学, 関数解析学, 確率統計学では絶対必要です。特に解析学序論ではいきなり 2 変数の $\varepsilon$-$\delta$ 論法から授業が始まるようです。

注意　**不可はすぐ消えますが、可は一生残ります。**今回の成績を不本意と考え、来年よりよい成績を取るため今期の成績を不可にしてほしい者は 2 月 10 日 4:00pm までに杉浦まで連絡下さい。