微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　　2003 年 1 月 10 日の試験の解答の要点[1]

1 与えられた写像は線形変換で特に Jacobian $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -5 \neq 0$ より単射である。よって、平行四辺形は平行四辺形に写されるので頂点の写る先を求めるればよい。それぞれ $(0,0) \to (0,0), (1,0) \to (2,1), (1,1) \to (1,-2), (0,1) \to (-1,-3)$ となるから $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,-2)$, $(-1,-3)$ を頂点とする平行四辺形の内部及び周に移される。(図は略す。)
面積: $|D| = \iint_D dudv = \iint_U \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dxdy = 5.$

2 D を図示することを (特に (1), (2), (3) について) 強く勧めるのだが、ここでは略す。

(1) (与式)$= \int_1^4 dx \int_{x^2/4}^x ydy = \int_1^4 \left\{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right\} dx = \cdots = \frac{657}{160}.$

(2) $D = \{(x,y) | 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2}\}$ より
(与式)$= \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} xy^2dy = \int_0^2 \frac{1}{2}y^2(2y-y^2)dy = \cdots = \frac{4}{5}.$

(3) $K_n = \{(x,y) | \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ とすると $\{K_n\}$ は D の近似列で

$$(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^2 dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^2 \left[\log(y + \sqrt{x^2+y^2})\right]_0^x dx = \cdots = \log(1+\sqrt{2}).$$

(4) $u = x+y, v = x-y$ とおくと、この変換により D は $\Omega = \{(u,v) | 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$ に一対一で写される。$x = (u+v)/2, y = (u-v)/2$ より $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}$ だから

$$(\text{与式}) = \iint_\Omega u^4 \cos v \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{2}\int_0^\pi du \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^4 \cos v dv = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^4 du = \frac{\pi^5}{10}.$$

(5) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ に対し、$x \geq 0$ より $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$, $(x^2+y^2)^2 \leq x^2-y^2$ に代入して $r^4 \leq r^2\cos 2\theta$, i.e., $r^2 \leq \cos 2\theta$. $\cos 2\theta \geq 0$ より $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ を得る。よって、$\Omega = \{(r,\theta) | \, r^2 \leq \cos 2\theta, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$ が D に面積 0 の集合を除いて一対一で写される。
ところで $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ より (与式) $= \displaystyle\iint_\Omega r dr\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\, dr = \cdots = \frac{1}{2}$ を得る.

(6) $K_n = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq n^2\}$ とすると $\{K_n\}$ は $\mathbf{R}^2$ の近似列で (与式)$= \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^3}$.
$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とすると $\Omega_n = \{(r,\theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq n\}$ は K_n に面積 0 の集合を除いて一対一で写され、$\iint_{K_n} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^3} = \iint_{\Omega_n} \frac{rdr\,d\theta}{(1+r^2)^3} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n \frac{rdr}{(1+r^2)^3} = \cdots = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{(1+n^2)^2}\right)$ となるから、(与式)$= \frac{\pi}{2}$ を得る。

3 $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \frac{2x}{\pi} \leq y \leq 1\} = \{(x,y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}y\}$ より
(与式)$= \iint_D \cos\frac{x}{y} dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}y} \cos\frac{x}{y} dx = \int_0^1 \left[y\sin\frac{x}{y}\right]_0^{\frac{\pi}{2}y} dy = \cdots = \frac{1}{2}.$

4 $D = \{(t,x) | 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq t^2\} = \{(t,x) | 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq t \leq 1\}$ より
$\int_0^1 f(t)dt = \iint_D t\cos(1-x)^2 dtdx = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 t\cos(1-x)^2 dt = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)\cos(1-x)^2 dx \overset{(*)}{=} \int_0^1 \frac{1}{4}\cos u du = \frac{\sin 1}{4}$. ($*$ では $u = (1-x)^2$ と置換した。)

5 $D = \{(x,y) | (x-y)^2 + y^2 \leq 4\}$ より $x - y = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと $\Omega = \{(r,\theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2\}$ は D に面積 0 の集合を除いて一対一で写され、$x = r\cos\theta + r\sin\theta$ より $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ だから $|D| = \iint_U rdrd\theta = \int_0^2 rdr \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi$ を得る。

[1]**注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。今回掲示した解答には試験日と問題 **2** (1), **5** に誤りがあった。配点は各 10 点で満点は 100 点である。**平均点は** $\mu = 44.3$ **点、標準偏差は** $\sigma = 15.20$ **でした。**ちなみに x 点の人の偏差値は $\frac{10}{\sigma}(x-\mu) + 50$ で求めることができます。