微分積分学 AD II，数学序論演習 II　　2002 年 12 月 10 日の試験の解答の要点[1]

1 [15] 陰関数の定理で $y = f(x)$ が定まるのは $F_y = -3x + 3y^2 \neq 0$ のときで、このとき、$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = \frac{x^2-y}{x-y^2}$, $f''(x) = \frac{(2x-y')(x-y^2)-(x^2-y)(1-2yy')}{(x-y^2)^2} = \frac{2xy(x^3+y^3-3xy+1)}{(x-y^2)^3} = \frac{2xy}{(x-y^2)^3}$.
極値: $f'(x) = 0, F(x,y) = 0$ を解いて $(x,y) = (0,0), (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. このとき、$f''(\sqrt[3]{2}) = -2 < 0$ より $x = \sqrt[3]{2}$ のとき極小値 $y = \sqrt[3]{4}$ となる。$(x,y) = (0,0)$ は陰関数の定理が成り立たない。(実際に極値ではない。)

2 [10] $f_x = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{2x\sqrt{1-(xyz)^2}+yz}{\sqrt{1-(xyz)^2}+xy}$, $f_y = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{2y\sqrt{1-(xyz)^2}+xz}{\sqrt{1-(xyz)^2}+xy}$
注意：偏微分と通常の一変数での微分を混同して用いている解答は **0** 点とした。

3 [10] 接平面： $F(x,y,z) = xy + yz + zx - 2$ とおくと接平面の方程式の公式より、$F_x(1,0,2)(x-1) + F_y(1,0,2)y + F_z(1,0,2)(z-2) = 0$. $F_x = y+z, F_y = x+z, F_z = x+y$ より $2(x-1) + 3y + z - 2 = 0$, 即ち、$2x + 3y + z = 4$ を得る。
対称な点:求める点は接平面に垂直で点 $(6,1,3)$ を通る直線上にあるので $(2t+6, 3t+1, t+3)$ とできる。これと $(6,1,3)$ の中点 $(t+6, \frac{3}{2}t+1, \frac{1}{2}t+3)$ が接平面上にあるので代入して解くと $t = -4$ を得る。よって、求める点は $(2,-5,1)$ である。

4 [10] $f_x = f_y = 0$ より $(x,y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0,0)$. $D = \{f_{xy}\}^2 - f_{xx}f_{yy}$ とすると、$(x,y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ のとき $D < 0, f_{xx} > 0$ より極小値 -8,
$(x,y) = (0,0)$ のとき $D = 0$ であるが、$f(t,t) = 2t^4 > 0$ $(t \neq 0)$ かつ $f(t,0) = -t^2(2-t^2) < 0$ $(0 < |t| < \sqrt{2})$ となり $(0,0)$ の近くで正にも負にもなるので $(x,y) = (0,0)$ は極値ではない。

5 [10] $f(x,y) = x, h(x,y) = x^2+y^2+xy-1$ とおき、Lagrange の未定乗数法を用いる。このとき、$\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} h$ を解いて $(x,y,\lambda) = (\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}), (-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3})$. よって、ヒントより、最大値で極大値、最小値で極小値となり極値の候補は 2 つしかないのでそれぞれが極大極小となる。以上より、$(x,y) = (\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ で極大値 $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$、$(x,y) = (-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ で極小値 $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ をとる。

6 [10] $\psi_x = -\frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)} = -\frac{2x\sqrt{1-(xyz)^2}+yz}{\sqrt{1-(xyz)^2}+xy}$, $\psi_y = -\frac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)} = -\frac{2y\sqrt{1-(xyz)^2}+xz}{\sqrt{1-(xyz)^2}+xy}$

7 [10] 与えられた写像は線形変換だから、平行四辺形は平行四辺形に写される。よって、それぞれの頂点の写る先を求めるればよい。それぞれ $(0,0) \to (0,0), (1,0) \to (2,1), (1,1) \to (3,-1), (0,1) \to (1,-2)$ となるから $(0,0)$, $(2,1)$, $(3,-1)$, $(1,-2)$ を頂点とする平行四辺形の内部及び周に移される。(図は略す。)
面積: $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = |2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1| = 5$.(この問題では写された図形も正方形なのでそれを利用してもよい。)
特に、Jacobian $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$ より一対一となることをわかる。

8 [5] $r^2 \sin\theta$ (単に偏導関数を求め行列式を計算すればよい。)

[1]注意　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。(今回掲示した解答には試験日と問題 **7** に誤りがあった。) [ ] 内は配点で、満点は 80 点である。平均点は $\mu = 24.7$ 点、標準偏差は $\sigma = 10.75$ でした。ちなみに x 点の人の偏差値は $\frac{10}{\sigma}(x-\mu) + 50$ で求めることができます。