微分積分学 AD II，数学序論演習 II　　2002 年 12 月 10 日の試験の解答の要点[1]

1 [15] 陰関数の定理で $y=f(x)$ が定まるのは $F_y=-3x+3y^2\neq 0$ のときで、このとき、$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=\frac{x^2-y}{x-y^2}$, $f''(x)=\frac{(2x-y')(x-y^2)-(x^2-y)(1-2yy')}{(x-y^2)^2}=\frac{2xy(x^3+y^3-3xy+1)}{(x-y^2)^3}=\frac{2xy}{(x-y^2)^3}$.
極値: $f'(x)=0, F(x,y)=0$ を解いて $(x,y)=(0,0),(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$. このとき、$f''(\sqrt[3]{2})=-2<0$ より $x=\sqrt[3]{2}$ のとき極小値 $y=\sqrt[3]{4}$ となる。$(x,y)=(0,0)$ は陰関数の定理が成り立たない。(実際に極値ではない。)

2 [10] $f_x=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{2x\sqrt{1-(xyz)^2}+yz}{\sqrt{1-(xyz)^2}+xy}$, $f_y=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{2y\sqrt{1-(xyz)^2}+xz}{\sqrt{1-(xyz)^2}+xy}$
注意：偏微分と通常の一変数での微分を混同して用いている解答は **0 点**とした。

3 [10] 接平面： $F(x,y,z)=xy+yz+zx-2$ とおくと接平面の方程式の公式より、$F_x(1,0,2)(x-1)+F_y(1,0,2)y+F_z(1,0,2)(z-2)=0$. $F_x=y+z, F_y=x+z, F_z=x+y$ より $2(x-1)+3y+z-2=0$, 即ち、$2x+3y+z=4$ を得る。
対称な点:求める点は接平面に垂直で点 $(6,1,3)$ を通る直線上にあるので $(2t+6,3t+1,t+3)$ とできる。これと $(6,1,3)$ の中点 $(t+6,\frac{3}{2}t+1,\frac{1}{2}t+3)$ が接平面上にあるので代入して解くと $t=-4$ を得る。よって、求める点は $(2,-5,1)$ である。

4 [10] $f_x=f_y=0$ より $(x,y)=(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2}),(0,0)$. $D=\{f_{xy}\}^2-f_{xx}f_{yy}$ とすると、$(x,y)=(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ のとき $D<0, f_{xx}>0$ より極小値 -8,
$(x,y)=(0,0)$ のとき $D=0$ であるが、$f(t,t)=2t^4>0$ $(t\neq 0)$ かつ $f(t,0)=-t^2(2-t^2)<0$ $(0<|t|<\sqrt{2})$ となり $(0,0)$ の近くで正にも負にもなるので $(x,y)=(0,0)$ は極値ではない。

5 [10] $f(x,y)=x, h(x,y)=x^2+y^2+xy-1$ とおき、Lagrange の未定乗数法を用いる。このとき、$\mathrm{grad}\, f=\lambda\,\mathrm{grad}\, h$ を解いて $(x,y,\lambda)=(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}),(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\sqrt{3})$. よって、ヒントより、最大値で極大値、最小値で極小値となり極値の候補は 2 つしかないのでそれぞれが極大極小となる。以上より、$(x,y)=(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$ で極大値 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$、$(x,y)=(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ で極小値 $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ をとる。

6 [10] $\psi_x=-\frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}=-\frac{2x\sqrt{1-(xyz)^2}+yz}{\sqrt{1-(xyz)^2}+xy}$, $\psi_y=-\frac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}=-\frac{2y\sqrt{1-(xyz)^2}+xz}{\sqrt{1-(xyz)^2}+xy}$

7 [10] 与えられた写像は線形変換だから、平行四辺形は平行四辺形に写される。よって、それぞれの頂点の写る先を求めるればよい。それぞれ $(0,0)\to(0,0),(1,0)\to(2,1),(1,1)\to(3,-1),(0,1)\to(1,-2)$ となるから $(0,0)$, $(2,1)$, $(3,-1)$, $(1,-2)$ を頂点とする平行四辺形の内部及び周に移される。(図は略す。)
面積: $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=|2\cdot(-2)-1\cdot 1|=5$.(この問題では写された図形も正方形なのでそれを利用してもよい。)
特に、Jacobian $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$ より一対一となることをわかる。

8 [5] $r^2\sin\theta$ (単に偏導関数を求め行列式を計算すればよい。)

[1]**注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。(今回掲示した解答には試験日と問題 **7** に誤りがあった。) [ ] 内は配点で、満点は 80 点である。**平均点は** $\mu=24.7$ **点、標準偏差は** $\sigma=10.75$ **でした。**ちなみに x 点の人の偏差値は $\frac{10}{\sigma}(x-\mu)+50$ で求めることができます。