微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　　2001 年 11 月 26 日の試験の解答の要点[1]

1 [10] $(a,b) \in E$ とする。$\varepsilon > 0$ を $0 < \varepsilon < 1 - \sqrt{a^2+b^2}$ と選べば、$(x,y) \in U_\varepsilon((a,b))$ のとき $\|(x,y)-(a,b)\| < \varepsilon$ より $\sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| \le \|(x,y)-(a,b)\| + \|(a,b)\| < \varepsilon + \sqrt{a^2+b^2} < 1$、即ち、$(x,y) \in E$ を得る。従って、$U_\varepsilon((a,b)) \subset E$ となり、E は開集合である。[2]

2 [各 5] (1) $(x,y) = (t, mt)$ とすると、$f(t,mt) = \frac{\sin mt^2}{(1+m^2)t^2} \to \frac{m}{1+m^2}$ $(t \to 0)$ より m の取り方によって極限が変わるので存在しない。

(2) $(x,y) \to (0,0)$ のとき、即ち、$\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ のとき、$|f(x,y)| \le \frac{x^2+y^2}{2} |\log(x^2+y^2)|$ より、$\lim\limits_{r \to 0} r^2 \log r = 0$ に注意すれば $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ を得る。

3 [4/6] (1) $f_x = -\frac{y}{x^2}\{1-(\frac{y}{x})^2\}^{-1/2},\ f_y = \frac{1}{x}\{1-(\frac{y}{x})^2\}^{-1/2}.$

(2) $f_x = x^{\frac{1}{x+y+z}} \left\{ \frac{1}{x(x+y+z)} - \frac{\log x}{(x+y+z)^2} \right\},\ f_y = f_z = -\frac{x^{\frac{1}{x+y+z}} \log x}{(x+y+z)^2}$

4 [10] $f_x(0,y) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} y \operatorname{Arctan} \left|\frac{y}{h}\right| = \frac{\pi}{2} y$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}\right.$ に注意$)$ より $f_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(0,0) = \frac{\pi}{2}$,
$f_y(x,0) = \lim\limits_{k\to 0} \frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} x \operatorname{Arctan}\left|\frac{k}{x}\right| = 0\ (x \ne 0),\ f_y(0,0) = \lim\limits_{k \to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$ より $f_{yx}(0,0) = 0.$

5 [15] 全微分可能であること: $f(0,0) = 0$ と $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = 0,\ f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(k,0)-0}{k} = 0$ に注意する。これより、$f(x,y) = f(0,0) + x f_x(0,0) + y f_y(0,0) + o(\sqrt{x^2+y^2}) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ $((x,y) \to (0,0))$ となることを証明すればよい。$|\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}| \le 1$ より $|f(x,y)| \le \frac{x^2+y^2}{2}$ となり $f(x,y)/\sqrt{x^2+y^2} \to 0.$ よって、$f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ となり全微分可能。
C^1 級ではないこと: $(x,y) \ne (0,0)$ のとき、$f_x(x,y) = y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ より $f_x(t,t) = (t - \frac{1}{\sqrt{2}|t|}) \sin \frac{1}{\sqrt{2}|t|}$ であるが、これは明らかに $t = 0$ で連続ではない。従って、$f_x(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続ではないので、C^1 級ではない。

6 [15] (1) $z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x \cos\alpha + z_y \sin\alpha,\ z_v = z_x x_v + z_y y_v = -z_x \sin\alpha + z_y \cos\alpha$ より ${z_x}^2 + {z_y}^2 = {z_u}^2 + {z_v}^2$ を得る。

(2) $z_{uu} = (z_{xx} x_u + z_{xy} y_u)\cos\alpha + (z_{yx} x_u + z_{yy} y_u) \sin\alpha = z_{xx} \cos^2\alpha + 2 z_{xy} \sin\alpha\cos\alpha + z_{yy} \sin^2\alpha$,
$z_{vv} = (z_{xx} x_v + z_{xy} y_v)\cos\alpha + (z_{yx} x_v + z_{yy} y_v)\sin\alpha = z_{xx}\sin^2\alpha - 2 z_{xy} \sin\alpha\cos\alpha + z_{yy} \cos^2\alpha$ より $z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$ を得る。

7 [10] $f = f_x = f_{xx} = f_{xxx} = e^x \cos y,\ f_y = f_{xy} = f_{xxy} = -e^x \sin y,\ f_{yy} = f_{xyy} = -e^x \cos y,\ f_{yyy} = e^x \sin y$ を公式に代入して $f(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + R_3$. 但し、$R_3 = \frac{e^{\theta x}}{6}(x^3 \cos\theta y - 3x^2 y \sin\theta y - 3xy^2 \cos\theta y + y^3 \sin\theta y),\ (0 < \theta < 1).$
特に、$|R_3| \le \frac{e^{|x|}}{6}(|x|^3 + 3|x|^2|y| + 3|x||y|^2 + |y|^3) = \frac{e^{|x|}}{6}(|x|+|y|)^3$. これが、誤差の限界である。

---

[1]**注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。(今回掲示した解答は問題 **2**(2) と **7** に誤りがあった。) [ ] 内は配点で、満点は 80 点である。**平均点は** $\mu = 28.9$ **点、標準偏差は** $\sigma = 12.36$ **でした。**ちなみに x 点の人の偏差値は $\frac{10}{\sigma}(x - \mu) + 50$ で求めることができます。

[2]集合 A, B に対し、「$A \subset B \overset{\text{def}}{\iff} \forall p \in A$ に対し $p \in B$」である。