微分積分学 AD I, 数学序論演習 I 2002 年 10 月 25 日の試験の解答の要点[1]

1 [10] (1) $\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right) / \left(\frac{n!}{n^n}\right) = 1/(1+\frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e} < 1$ より d'Alembert の判定条件より収束する。

(2) $\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = (\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}})^2 \frac{1}{1+\cos\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}$ で $\sum \frac{1}{n^2}$ は収束するから比較判定法により与式は収束する。[2]

2 [10] 以下 $a_n = \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ と書く。$\alpha \le 0$ のとき $a_n \ge \log 2$ となり $(-1)^{n-1}a_n \to 0$ とはならないので発散する。$\alpha > 0$ のとき $\{a_n\}$ は減少列で $\lim a_n = 0$ となるから Leibniz の定理より収束する。
一方 $\frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\alpha} \to \log e = 1$ となり $\sum a_n$ と $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ の収束・発散は同時におこる。特に $\alpha > 1$ のとき $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ は収束するので、与式は絶対収束する。以上より、条件収束するのは $0 < \alpha \le 1$ のときである。

3 [10] 仮定より $a_n \to 0$ だからある N が存在して、$n \ge N \implies |a_n| < 1$. 即ち、$|{a_n}^2| \le |a_n|$ となるから、$\sum |{a_n}^2| \le \sum_{n=1}^N |{a_n}^2| + \sum_{n=N+1}^\infty |a_n| < \infty$ を得る。以上より絶対収束する。
$a_n = \frac{1}{n}$ とおくと、$\sum(\frac{1}{n})^2$ は収束するが、$\sum \frac{1}{n}$ は発散する。よって、逆は成立しない。

4 [10] $\lim f_n(x) = 0$ に注意する。($x = 0$ のときは明らか。$x > 0$ のときは $n^p/e^{nx} \to 0$ による。)[3]
$\sup\{|f_n(x) - 0| | 0 \le x \le 1\} = n^{p-1}e^{-1}$ で $n^{p-1}e^{-1} \to 0$ となるのは $p < 1$ のときであるから、$p < 1$ のとき一様収束する。

5 [10] (1) $\left|\frac{nx^3}{n^3+x^3}\right| \le \frac{1}{n^2}, \sum \frac{1}{n^2} < \infty$ より Weierstass の M-判定法により与式は一様収束する。[4]

(2) 等比級数の公式より (与式)$= 0$ $(x = 0)$, $= 1 - x$ $(0 < x \le 1)$ である。よって $x = 0$ で不連続である。一方、与式が一様収束すれば各項は連続なので無限和も連続となるから、一様収束しない。

6 [20] (1) $\frac{1}{R} = \lim(1-\frac{2}{n})^n = \frac{1}{e^2}$ より収束半径 $= e^2$.

(2) $1 \le (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} \le n^{\frac{1}{n}}$ で $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ より挟み打ちの原理から $\frac{1}{R} = \lim(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} = 1$. よって、収束半径 $= 1$.

(3) $|x| \ge 1$ のとき $|n^n x^{2^n}| \to \infty$ より $\sum n^n x^{2^n}$ は発散する。$|x| < 1$ のとき $\lim |n^n x^{2^n}|^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^2}{2^n}\frac{2^n}{n}|x|^{\frac{2^n}{n}} = 0$. ($|r| < 1$ のとき $nr^n \to 0$ を用いた。) 従って、Cauchy の判定法により $\sum n^n x^{2^n}$ は収束する。以上より、収束半径 $= 1$.

7 [10] $\sum(-x)^n$ の収束半径は 1 であるから、$|x| < 1$ のとき $[0,x]$(あるいは $[x,0]$) で項別積分できて、$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^\infty (-t)^n dt = \sum_{n=0}^\infty \int_0^x (-t)^n dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$. [5]
ここで、$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は交代級数であるから Leibniz の定理により収束する。従って、Abel の定理より $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ は $0 \le x \le 1$ 上で一様収束する。即ち、$x = 1$ においても連続なので $\log(1+x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ は $-1 < x \le 1$ に対して成立する。

8 [10] $\varepsilon > 0$ を任意にとっておく。$f(x)$ は有界閉区間 $[0,1]$ で連続だから一様連続。よって、$\delta > 0$ が依存して $|x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$. 今、$\int_0^1 n(1-x)^{n-1}dx = 1$ より、$I_n \equiv |f(0) - \int_0^1 f(x)n(1-x)^{n-1}dx| = |\int_0^1 \{f(0)-f(x)\}n(1-x)^{n-1}dx| \le |\int_0^\delta \{f(0)-f(x)\}n(1-x)^{n-1}dx| + |\int_\delta^1 \{f(0)-f(x)\}n(1-x)^{n-1}dx| \equiv J_n + K_n$. ここで、$K_n \le \int_0^\delta |f(0)-f(x)|n(1-x)^{n-1}dx \le \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 n(1-x)^{n-1}dx = \frac{\varepsilon}{2}$. 一方、$\delta \le x \le 1$ に対し $|\{f(0)-f(x)\}n(1-x)^{n-1}| \le 2Mn(1-\delta)^n \to 0$ より一様収束するから $K_n \to 0$. ($M = \max_{0\le x\le 1}|f(x)|$ とした。) 即ち、ある N が存在して $n \ge N \implies |K_n| < \varepsilon/2$ とできる。以上より、$n \ge N \implies |I_n| \le |J_n| + |K_n| < \varepsilon$ となるから、即ち、$\lim \int_0^1 f(x)n(1-x)^{n-1}\,dx = f(0)$ の証明が完了した。

---

[1] **注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は 90 点である。**平均点は 20.2 点、最高点は 58 点でした。**

[2] $\lim\limits_{n\to\infty}$ を単に lim と記す。無限和 $\sum$ の和に関する範囲が自明にわかるときは $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ や $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ を単に $\sum$ と記す。以下も同様。

[3] これを略した解答は減点した。

[4] Weierstass の M-判定法を用いるとき $|f_n(x)| \le M_n, \sum M_n < \infty$ における M_n は x の関数であってはいけない。M_n が x に依存していた解答は 0 点とした。

[5] 収束半径や一様収束性に言及せずに項別積分をした解答はすべて 0 点とした。