**微分積分学 AD II, 数学序論演習 II**　　2002 年 12 月 6 日[1]

- 1 月 10 日（4 回目）の試験の範囲は第 7 章重積分とその応用の §§ 1–4 とします。

## 7　重積分とその応用

### § 1 重積分, § 2 重責分の計算, § 3 広義重責分, § 4 重責分の計算の補足問題

教科書の問 1 – 11 と p.220 – の演習問題 **A**, **1**, **3** – **7** と **B**, **13** (1), (2), **14**, **16** – **18** を解いておくこと。
『荷見・堀内著 現代解析の基礎』の p.315 – の **7.26 演習問題 23** の **1** – **10** も解いておくこと。
以下の問題も範囲に加える。(昨年度用いた教科書からの丸写しです。写し間違い以外の間違いをチェックしていないので、間違いを含む可能性もある。また、計算できない可能性もある。)

**1.**　次の重積分の値を求めよ。(括弧内は $D$ を表す。)[2]

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dx\,dy \quad (x^2-2ax+y^2 \le 0,\ y \ge 0) \qquad (a>0 \text{ とする})$

(2) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad (x+y \le 1,\ x,y \ge 0)$　　(3) $\displaystyle\iint_D x^2\,dx\,dy \quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \mathrm{Arcsin}\,x)$

(4) $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy \quad (\sqrt{x}+\sqrt{y} \le 1)$　　(5) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{1+x^2} \quad (0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1)$

(6) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{(x-y)^2+2(x+y)+1}} \quad (0 \le y \le x \le 2) \qquad (\text{ヒント: } x=s(1+t), y=t(1+s) \text{ とせよ。})$

(7) $\displaystyle\iint_D \frac{y\,dx\,dy}{(x+y)^2+1} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \le x+y \le 1,\ x,y \ge 0\right) \qquad (\text{ヒント: } x+y=s, y=st \text{ とせよ。})$

(8) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad (|x+y| \le 1, |x-y| \le 1) \qquad (\text{ヒント: } x+y=s, x-y=t \text{ とせよ。})$

(9) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{xy+1}\,dx\,dy \quad \left(\frac{x}{4} \le y \le x,\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{4}{x}\right) \qquad (\text{ヒント: } x=st, y=s/t \text{ とせよ。})$

(10) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad (x^2+y^2 \le a^2,\ (x-a)^2+y^2 \ge a^2,\ x,y \ge 0) \qquad (a>0 \text{ とする})$

(11) $\displaystyle\iint_D 1\,dx\,dy \quad \big((x^2+y^2)^2 \le x^2-y^2\big) \qquad (\text{ヒント: (10), (11) では極座標を用いよ。})$

**2.**　次の累次積分の順序を変更せよ。[3]

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^{2} f(x,y)\,dy$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{1+x}} f(x,y)\,dy$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{x-x^2} f(x,y)\,dy$

**3.**　次の広義積分の値を求めよ。(括弧内は $D$ を表す。)[4]

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^\alpha} \quad (0<x,y \le 1) \qquad (\alpha>0 \text{ とする})$　　(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-xy}} \quad (0 \le x < 1,\ 0 \le y \le x)$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy \quad (0<x \le 1,\ 0<y \le 1)$　　(4) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-3x^2+2xy-3y^2}\,dx\,dy$

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{(x^2+y^2)(x^2+1)^2}\,dx\,dy \quad (0<x \le y)$　　(6) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$

(7) $\displaystyle\iint_D |x-y|^{-a}\,dx\,dy \quad (0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, y \ne x) \qquad (0<a<1 \text{ とする})$

---

[1] 杉浦のホームページ ( http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html ) からもダウンロードできます。

[2] **解答: 1** (1) $\frac{4}{5}a^5$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}$ (4) $\frac{1}{30}$ (5) $\frac{1}{2}\log 2$ (6) $2\log 2-\frac{1}{2}$ (7) $\frac{3-\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{24}$ (8) $\frac{2}{3}$ (9) $\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\log\frac{5}{2}$ (10) $(\frac{7\sqrt{3}}{16}-\frac{5\pi}{24})a^4$ (11) 1

[3] **2** (1) $\int_0^1 dy \int_y^{\mathrm{Arcsin}\,y} f(x,y)\,dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,dx$ (2) $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^1 f(x,y)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_0^{\frac{1}{y}-1} f(x,y)\,dx$ (3) $\int_0^{\frac{1}{4}} dy \int_{\frac{1-\sqrt{1-4y}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4y}}{2}} f(x,y)\,dx$

[4] **3** (1) $\alpha \in (0,2)$, $\alpha \ne 1$ のとき $\frac{2^{2-\alpha}-2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$. $\alpha=1$ のとき $2\log 2$. $\alpha \ge 2$ のとき $+\infty$ (2) $2-2\log 2$ (3) $\log 2+\frac{\pi}{2}$ (4) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ (5) $\frac{\pi}{8}$ (6) $\pi$ (7) $2/(1-a)(2-a)$ (8) $1/24$ (9) $a^4/6$ (10) $-\pi$ (11) $\pi/2a$

(8) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^4}$ $\quad (x \geq 1,\ y \geq 1)$

(9) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 y}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dx\,dy$ $\quad (0 \leq y < a,\ x^2+y^2 \leq a^2)\ \ (a>0)$

(10) $\displaystyle\iint_D \log\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy$ $\quad (0 < x^2+y^2 \leq 1)$

(11) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)\left(a^2+x^2+y^2\right)^2}}$ $\quad (x \geq 0,\ y \geq 0)$

**4.** 次の図形の面積を求めよ。[5]

(1) $D = \{\,(x,y) \mid x^2 - xy + y^2 \leq 1\}$

(2) 極座標により $r = a\sin n\theta$ $(a>0$, $n$ は自然数$)$ によって囲まれる図形。

(3) $(x^2+y^2)^2 = a^2xy$ $(a>0)$ によって囲まれる図形。

[5] **4** (1) $2\pi/\sqrt{3}$ (2) $n$ が偶数のとき $\pi a^2/2$, $n$ が奇数のとき $\pi a^2/4$ (3) $a^2/2$