6 偏微分とその応用

§ 1 点集合・点列, § 2 多変数関数の極限と連続性の補足問題
教科書の問 1 – 11 と p.185 – の演習問題 **A**, **1**,**2** と **B**, **16**, **17** を解いておくこと。『荷見・堀内著 現代解析の基礎』の p.245 – の **7.4 演習問題 19** の **5**,**8** – **15** も解いておくこと。

§ 3 偏微分
教科書の問 12 – 21 と p.185 – の演習問題 **A**, **3** – **10** と **B**, **18** – **21** を解いておくこと。ただし、**A 10** で $\operatorname{grad} u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$ である。(勾配という, *cf.* 教科書 p.174.) 『荷見・堀内著 現代解析の基礎』の p.253 – の **7.8 演習問題 20** の **3**,**4**,**6** – **10**, p.260 – の **7.12 演習問題 21** の **1** – **10** も解いておくこと。

§ 4 陰関数
教科書の問 22 – 24 と p.185 – の演習問題 **A**, **11** を解いておくこと。『荷見・堀内著 現代解析の基礎』の p.279 – の **7.17 演習問題 22** の **3** – **6** も解いておくこと。

§ 4.5 逆写像定理
ここにあることは『荷見・堀内著 現代解析の基礎』の p.276 – **7.16 ヤコビ行列式**にも述べられている。[2]
『荷見・堀内著 現代解析の基礎』の p.279 – の **7.17 演習問題 22** の **12** – **15** も解いておくこと。

定義　xy-平面の領域 D から uv-平面への写像 Φ とは $\Phi : (u, v) = \Phi(x, y) = (\varphi(x, y), \psi(x, y))$ と 2 組 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ で表される。Φ は C^1-級、即ち、φ, ψ は C^1-級であるとする。このとき、写像 Φ の Jacobian を

$$J(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

で定義する。

定理　**(逆写像定理)** $(c, d) = \Phi(a, b)$ とし、$J(a, b) \neq 0$ を仮定する。このとき、(a, b) を含む領域 D_0 が存在して、Φ は D_0 から $\Omega_0 = \Phi(D_0) = \{(\varphi(x, y), \psi(x, y)) | (x, y) \in D_0\}$ への単射となる。即ち、Ω_0 から D_0 への Φ の C^1-級の逆写像が存在する。

問題　xy-平面の正方形 $U = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$ は、次のおのおのの写像によって、uv-平面のどんな集合に写されるか。(解答は略す。)

(1) $\begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases} \quad (ad - bc \neq 0)$　　(2) $\begin{cases} u = xy \\ v = x \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$

§ 5 偏微分の応用
裏面の **(0) 平面の方程式、直線の方程式**の問題 **1** – **9** を解いておくこと。
教科書の問 25 – 31 と p.185 – の演習問題 **A**, **12**,**13** と **B**, **22**,**23** を解いておくこと。『荷見・堀内著 現代解析の基礎』の p.253 – の **7.8 演習問題 20** の **5** と p.279 – の **7.17 演習問題 22** の **1**,**9** – **11** も解いておくこと。

● 11 月 26 日（2 回目）の試験の範囲は第 6 章偏微分とその応用の §§1–4 と § 4.5 の予定です。

[1]杉浦のホームページ (http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/˜sugiura/index.html) からもダウンロードできます。
[2]記号は教科書 p.204–や p.253–に従いました。

平面の方程式、直線の方程式に関する補足[3]

● $\mathbf{n}=(a,b,c)\neq\mathbf{0}$ とする。点 $A(x_1,y_1,z_1)$ を通り、ベクトル $\mathbf{n}$ に垂直な平面の方程式は、次の式で表される。

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \tag{1}$$

特に、平面の方程式は $ax+by+cz=d$ と表わされる。このベクトル $\mathbf{n}=(a,b,c)$ を平面 $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ や $ax+by+cz=d$ の法線ベクトルという。

証明 これは平面上の点を $P(x,y,z)$ とすると、ベクトル $\overrightarrow{AP}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$ とベクトル $\mathbf{n}$ が直交しているため、その内積が 0 になることより (1) は従う。次の式は $d=ax_1+by_1+cz_1$ とすれば (1) より得られる。□

問題 1[4] 次の平面の方程式を求めよ。

(1) 点 $A(2,1,4)$ を通り、ベクトル $\mathbf{n}=(3,2,0)$ に垂直な平面

(2) 点 $A(2,1,4)$ を通り、x 軸に垂直な平面

(3) 3 点 $A(1,2,3)$, $B(2,3,3)$, $C(2,-3,-1)$ を通る平面

(4) 2 点 $A(1,2,-1)$, $B(3,-1,0)$ を結ぶ直線 AB に垂直で、しかも点 $(1,-1,2)$ を通る平面

問題 2 原点 O から平面 $ax+by+cz=d$ までの距離 p は、$p=\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ で表わされることを示せ。

問題 3 (1) 原点 O から平面 $x-2y-z-6=0$ までの距離を求めよ。

(2) 点 $(1,2,3)$ から平面 $3x+y-2z+28=0$ までの距離を求めよ。

問題 4 次の 3 つの平面を、それぞれ α_1, α_2, α_3 とする。

$$2x-3y+4z=0 \qquad 6x-4y-6z=5 \qquad -9x+6y+9z=7$$

(1) 2 平面 α_1, α_2 は垂直であることを示せ。

(2) 2 平面 α_2, α_3 は平行であることを示せ。

問題 5 次の 2 つの平面のなす角 θ を求めよ。ただし、$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ とする。

(1) $-x+3y-5z=1,\quad 2x-y-z=3$

(2) $x+3y-\sqrt{6}z=3,\quad 2x+2y=3$

● ベクトル $\mathbf{k}=(a,b,c)\neq 0$ に平行で、点 $A(x_1,y_1,z_1)$ を通る直線の方程式は、$\mathbf{p}=(x,y,z)$, $\mathbf{a}=(x_1,y_1,z_1)$ とするとき、$\mathbf{p}=\mathbf{a}+t\mathbf{k}$ $(t\in\mathbf{R})$、成分で表わすと

$$x=x_1+at \qquad y=y_1+bt \qquad z=z_1+ct$$

と媒介変数表示される。これから、t を消去し、$\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ とも表わされる。このベクトル $\mathbf{k}$ を直線の方向ベクトルという。

問題 6 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $A(2,-3,5)$ を通り、$\mathbf{k}=(1,2,-1)$ に平行な直線

(2) 点 $A(1,2,3)$ を通り、$\mathbf{k}=(0,2,0)$ に平行な直線

(3) 2 点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$ を通る直線

(4) 点 $A(2,0,-1)$ を通り、直線 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$ に平行な直線

問題 7 2 つの直線 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{4},\quad x-1=\dfrac{2-y}{10}=\dfrac{-z}{7}$ のなす角 θ を求めよ。ただし、$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ とする。

問題 8 点 $A(1,2,-3)$ を通り、2 つの平面 $3x-2y+z=-4$, $x+y-z=1$ に垂直である平面の方程式を求めよ。

問題 9 (1) 平面 $x+2y+3z=5$ に関して点 $A(2,1,5)$ と対称な点 A' の座標を求めよ。

(2) その点 A' と点 $B(6,6,5)$ を結ぶ直線 $A'B$ の方程式と、その直線と上の平面との交点の座標を求めよ。

[3] 数年前までこのことは高校で教えられていた。その名残で最近の大学の教科書でも高校で履修済みとして述べられていない。

[4] 以下の問題はすべて昭和 58 年度の高校 2 年生向けの教科書からである。