微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　　2002 年 10 月 15 日

§3 関数列および関数項級数 [1]

定義 $f_n(x)$, $f(x)$ を区間 I 上に定義された関数とする。

(1) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で各点収束するとは、すべての $x \in I$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ となるときに、即ち、任意の $x \in I$ と $\varepsilon > 0$ に対しある番号 $N = N(x, \varepsilon)$ が存在して

$$n \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となるときにいう[2]。

(2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束するとは、$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$ となるときに、即ち、任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 $N = N(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in I)$$

となるときにいう[3]。このとき、$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty)$ とも記す。

命題 関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束すれば各点収束する。

証明 $\forall x \in I$ に対し $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ より成立。 □

例 $f_n(x) = x^n$ $(x \in [0,1])$ に対し $f(x) = 0$ $(0 \leq x < 1), = 1$ $(x = 1)$ に各点収束するが、$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,1]$ 上で一様収束しない。

証明 各点収束することは明らか。$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$ であるから、一様収束はしない。 □

定理 5.8 (Cauchy 列) 区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束するための必要十分条件は、$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| = 0$ となる、即ち、任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 $N = N(\varepsilon)$ が存在して

$$n, m \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (x \in I)$$

となることである。[4]

定理 5.9 区間 I 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束すれば、$f(x)$ は I 上の連続関数となる。

定理 5.10 有界閉区間 $[a,b]$ 上で積分可能な関数の列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a,b]$ 上で一様収束すれば、$f(x)$ も $[a,b]$ 上で積分可能で、

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

となる。[5]

例 $f_n(x) = 2n^2 x$ $(0 \leq x \leq \frac{1}{2n}), = -2n^2(x - \frac{1}{2n}) + n$ $(\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}), = 0$ $(\frac{1}{n} \leq x \leq 1)$ とおくと、$\{f_n(x)\}$ は $f(x) = 0$ に各点収束するが、$\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ となり $\int_0^1 f(x)dx = 0$ には収束し得ない。このとき、$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = n$ となり、$\{f_n(x)\}$ は $f(x) = 0$ に一様収束しない。

定理 5.11 区間 I 上の C^1 級関数の列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で各点収束し、$\{f_n'(x)\}$ が $g(x)$ に I 上で一様収束すれば、$f(x)$ も C^1 級で、$f'(x) = g(x)$ となる。

問題 1 次で与えられる $f_n(x)$ と I に対し、$\{f_n(x)\}$ の一様収束性を調べよ。[6]

(1) $f_n(x) = nx^n$, $I = [0,a]$ $(0 < a < 1)$　　(2) $f_n(x) = 1/\{1 + (x-n)^2\}$　$I = \mathbf{R}$

(3) $f_n(x) = n^p x e^{-nx^2}$, $I = \mathbf{R}$ $(p > 0)$　　(4) $f_n(x) = nx(1-x)^n$　$I = [0,1]$

(5) $f_n(x) = nx(1 + n^2x^2)^{-1}$, $I = \mathbf{R}$　　(6) $f_n(x) = n\sin(x/n)$　$I = [0,\pi]$

---

[1] 10 月 11 日の授業で後半急いでしまったので、ノートの補助のためです。昨年 10 月 5 日配布したものに少し手を加えたものである。

[2] $N = N(x, \varepsilon)$ は x と ε に依存するの意味

[3] (1) と較べて N が x に依存しないことに注意

[4] この定理は例えば微分方程式の解の存在証明に応用される。証明は以下略させていただきます。

[5] この事実を（より一般的な関数の積分を可能にするとともに）拡張したのが**ルベーグ積分論**である。特に確率論や微分方程式論はこの恩恵を受け飛躍的に発展した。

[6] **解答:** 一様収束するのは (1), (3) $p < 1$ のとき, (6). / hint:まず各点収束の極限を調べよ。

定義 (関数項級数) $f_n(x)$ を区間 I 上の関数、部分和を $F_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ とおく。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上で各点収束 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\{F_n(x)\}$ が I 上で各点収束

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上で一様収束 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\{F_n(x)\}$ が I 上で一様収束

● 定理 5.9–5.11 において関数列 $f_n(x)$ を関数項級数の部分和 $F_n(x)$ と見なすことで次の定理 5.9'–5.11' を得る。

定理 5.8' (Cauchy 列) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上の一様収束 $\overset{\text{iff}}{\iff}$ $\lim_{n,m\to\infty}\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right|=0$

系 (Weierstrass の M-判定法) 区間 I 上の関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ に対し、数列 $\{M_n\}$ で

$$|f_n(x)|\le M_n \quad (n=1,2,\ldots,\ x\in I) \qquad \text{かつ} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} M_n<\infty$$

を満たすものが存在すれば、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上の一様収束する。

定理 5.9' $f_n(x)$ が区間 I で連続であれば、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ も $f(x)$ は I 上の連続関数となる。

定理 5.10' $f_n(x)$ が有界閉区間 $[a,b]$ 上積分可能で $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上の一様収束すれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx.$$

定理 5.11' 区間 I 上の C^1 級関数 $f_n(x)$ に対し、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上の各点収束し $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ が I 上の一様収束すれば、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上の C^1 級で、$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ となる。

例 数列 $\{a_n\}$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束すれば、$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$ は $\mathbf{R}$ 上一様収束するので連続である。このとき、$a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ となる。また、$\{a_n\}$ が $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|<\infty$ を満たせば、上記の $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の C^1 級で $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n\cos nx$ となる。[7]

問題 2 次で関数項級数が I 上で一様収束するか調べよ。[8]

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+x^2},\ I=\mathbf{R}$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx},\ I=[0,1]$　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx},\ I=(0,\infty)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n\cos(b^n\pi x),\ I=\mathbf{R}\ \ (|a|<1,\ b\in\mathbf{R})$　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^p x^2},\ I=\mathbf{R}\ \ (p>2)$

問題 3 次を示せ。[9]

(1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^3}$ に対し、$\int_0^{\pi} f(x)\,dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}$ および $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$.

(2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3+n^4x^2}$ に対し、$f'(x)=-2x\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(1+nx^2)^2}$.

---

[7] これは Fourier 級数論の最も簡単な場合である。

[8] **解答:** 一様収束するのは (1), (4), (5).

[9] Hint: 積分に関しては定理 5.10' を、微分に関しては定理 5.11' を適用せよ。さらにこのためには Weierstrass の M-判定法を用いよ。