微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　テスト　　出題日 2002 年 8 月 2 日

- 解答用紙は裏面も使用してください。
  名前と学籍番号は提出するすべての解答用紙に記入してください。

1. 関数 $f(x)$ は $x=a$ の近くで C^3 級、$f'''(a) \neq 0$ ならば、h に対し θ を

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a+\theta h)}{2}h^2$$

で定めるとき $\lim_{h\to 0}\theta = 1/3$ であることを示せ。

2. $[a,b]$ で $f''(x)$ が連続で、(a,b) で $f'''(x)$ が連続であるとき、

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f'''(c), \qquad a<c<b$$

を満たす c が存在することを示せ。

ヒント: $\varphi(x) = f(x+\alpha) - f(-x+\alpha) - 2xf'(\alpha), \psi(x) = 8x^3$ (但し、$\alpha = \frac{a+b}{2}$) とし、Cauchy の平均値の定理を数回用いることで $\frac{\varphi(\frac{b-a}{2})}{\psi(\frac{b-a}{2})} = \frac{f''(\gamma+\alpha)-f''(-\gamma+\alpha)}{24\cdot 2\gamma}$ $(\alpha < \gamma < \frac{b-a}{2})$ をまず示し、更にこの右辺に平均値の定理を用いよ。

3. Taylor の公式を用いて、$f(x) = e^x$ の Maclaurin 展開式を導け。

4. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^{100}}{x^{1/2}}$　(2) $\displaystyle \lim_{x\to\pi/2-0} \frac{\log\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\tan x}$　(3) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\log x}$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left\{x - x^3\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right\}$　(5) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

5. (1) 関数 $\mathrm{Arcsin}\,x - \sin x$ は $x \to 0$ のとき何位の無限小か。

(2) $f(x) = \log(1+x) - \dfrac{x}{1+ax}$ が $x \to 0$ のとき 3 位の無限小となるように a の値を定めよ。

6. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\sin 2x}\frac{1}{\sin 3x} - \frac{\alpha}{\sin^2 x}\right\} = \beta$ を満たす実数 α, β を求めよ。

ヒント: まず、$\{\cdots\}$ を $\frac{\sin^2 x - \alpha\sin 2x \sin 3x}{6x^4}(\frac{x}{\sin x})^2 \frac{2x}{\sin 2x}\frac{3x}{\sin 3x}$ と変形する。これが収束するためには $\varphi(x) = \sin^2 x - \alpha \sin 2x \sin 3x$ が 4 位 (以上) の無限小になるように α を決定すればよい。

連絡 8 月 6 日（火）10:20 から答案用紙を返却するので、返却を希望する者は理学部 408 室 (数学序論を行っている教室) に受け取りに来ること。