微分積分学 AD I，数学序論演習 I　テスト 6 回目　出題日 2001 年 7 月 19 日

- 解答用紙は裏面も使用してください。
  名前と学籍番号は提出するすべての解答用紙に記入してください。

1. 次の定積分を求めよ。(広義積分も含まれる。注意せよ。)

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$　(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$

ヒント: (6) は $t=\frac{\pi}{4}-x$ と置換せよ。

2. 次の広義積分が収束することを示せ。ただし、定数 $\alpha>0$ に対する広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ や $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ の収束・発散の結果は証明なしで用いても構わない。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1/2}}{\sin x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_1^\infty x^2e^{-x^2}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_1^\infty \cos\left(x^4\right)\,dx$

3. 定積分の定義を用いて、次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$$

4. 次の関数を x について微分せよ。ただし、関数 f は連続、a,b は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_a^{x^2} f(t)\,dt$　(2) $\displaystyle\int_a^b tf(x-t)\,dt$

5. 次の不等式を証明せよ。

$$2\left(1-\frac{1}{e}\right)<\int_0^\pi e^{-\sin x}\,dx<\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

ヒント: $\sin x=\sin(\pi-x)$ 及び $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ を用いよ。

6. $[a,b]$ で $f(x)$ が連続かつ $f(x)\geq 0$ ならば、

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b\{f(x)\}^n\,dx\right)^{1/n}=\max\{\,f(x)\,|\,a\leq x\leq b\,\}$$

を示せ。

ヒント: $f(c)=\max\{\,f(x)\,|\,a\leq x\leq b\,\}$ なる $c\in[a,b]$ を選ぶと、任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して $|x-c|<\delta$ ならば $f(c)-\varepsilon<f(x)\leq f(c)$ となることを用いよ。