微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　テスト　　出題日　2001 年 6 月 14 日

- 解答用紙は裏面も使用してください。
  名前と学籍番号は提出するすべての解答用紙に記入してください。

1.　(1) $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続かつ (a,b) で微分可能であるとする。このとき、$f'(x)=0$ $(a<x<b)$ であれば $f(x)$ は定数関数であることを平均値の定理より導け。

(2)　$\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{Arctan}\,x \quad (x>0)$ を示せ。
(ヒント：$f(x) = \mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \mathrm{Arctan}\,x$ に対し (1) を用いよ。)

2.　関数 $f(x)$ は C^2 級で $f''(x) \geq 0$ $(x \in \mathbf{R})$ とする。このとき、Taylor の公式を用いて $f(x)$ のグラフはその接線よりも上側にあることを示せ。

3.　(1)　Taylor の公式を用いて、$\cos x$ の Maclaurin 展開式を導け。

(2)　$\sin^2 x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}$　　を示せ。(ヒント：(1) を用いよ。)

4.　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \mathrm{Arcsin}\,x}{x^3}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(e^x \log x - x^2\right)$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e - e^{\cos x}}{x^2}$　　(4)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{x - x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}$

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,x\right)^{\frac{1}{x}}$　　(6)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

5.　(1)　$x \to 0$ のとき、$\tan x - \sin x = O(x^3)$ を証明せよ。

(2)　任意の $\alpha > 0$ に対し、$x \to \infty$ のとき $(\log x)^{1000} = o(x^{\alpha})$ を証明せよ。

6.　$f(x) = \log(1+x) - \dfrac{x(1+bx)}{1+ax}$ が $x \to 0$ のとき 4 次の無限小となるように a, b の値を求めよ。