微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　テスト　　出題日　2001 年 5 月 21 日

- 解答用紙は裏面も使用してください。(ちゃんと採点します。)
  名前と学籍番号は提出するすべての解答用紙に記入してください。

1.　(1)　$\alpha \in \mathbf{R}$ とする。$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ の定義を述べよ。

(2)　$\lim_{x\to\infty} \sin x$ は存在しない。これを示せ。

2.　次の極限値を求めよ。ただし、$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ は既知とする。
(挟みうち原理を用いるときはそれを明記せよ。)

(1)　$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/4}-1}{(1+2x)^{1/3}-(1-2x)^{1/3}}$　　(2)　$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2+2x-3}{|x-1|}$

(3)　$\lim_{x\to 1} \frac{\tan(x^2-1)}{\sin(x-1)}$　　(4)　$\lim_{x\to 0}(1-2x+x^2)^{1/x}$

(5)　$\lim_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}\right)$　　(ヒント: 加法定理を用いよ)

(6)　$\lim_{x\to -\infty}(2^x+3^x)^{1/x}$　　(7)　$\lim_{x\to -\infty} x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

3.　$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$ とおくと、$f(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ。

4.　(1)　中間値定理を述べよ。(証明の必要はない。)

(2)　$f(x)$ は $I = [-1,1]$ で連続で、I 上 $-1 < f(x) < 1$ ならば、方程式 $f(x) = x$ は $(-1,1)$ において少なくとも一つ解を持つことを中間値定理を用いて示せ。

(3)　方程式 $x\tan x = 1$ は区間 $(n\pi, n\pi+\pi/2)$ $(n = 0,1,2,\dots)$ に解が一つずつあることを示せ。

5.　関数 $f(x) = x^2$ が $\mathbf{R}$ 上で一様連続でないことを示せ。

6.　関数 $f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上で連続で $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ を満たせば、$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で一様連続であることを示せ。ただし、有界閉区間上の連続関数が一様連続であることは証明なしで用いても構わない。