微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　テスト　　出題日　2001 年 5 月 7 日

1.　$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1\,,\,2+\frac{1}{n}\right)=(\,1\,,2\,]$ を示せ。

2.　集合 $A=\{\,x\in\mathbf{Q}\,|\,x^2<x+2\}$ に対し、$\sup A$ を求めよ。

3.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ で $\alpha\neq0$ のとき、以下に答えよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ の定義を述べよ。

(2)　ある $N\in\mathbf{N}$ が存在して $n\geq N$ ならば $|a_n|>\dfrac{|\alpha|}{2}$ となることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\alpha}$ を示せ。

4.　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$　　$\left(\displaystyle\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1\ (a>0)\right.$ は既知としてよい。)

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^n-n)$　　(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}$

5.　「有界な単調数列は収束する」を用いて、

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\quad(n=1,2,\dots)$$

によって定義される数列 $\{a_n\}$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

6.　$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$ $(n\geq1)$ によって定義される数列について以下を示せ。

(1)　$\dfrac{1}{2}\leq a_n\leq1$ $(n\geq1)$ を示し、これを用いて

$$|a_{n+1}-a_n|\leq\frac{4}{9}|a_n-a_{n-1}|\qquad(n\geq2)$$

を示せ。

(2)　$\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示せ。

(3)　(2) より $\{a_n\}$ は収束列である。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。