微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2002 年 7 月 19 日の試験の解答の要点[1]

1 [40] (1) (与式) $=\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = [\mathrm{Arcsin}(x-1)]_0^2 = \mathrm{Arcsin}\,1 - \mathrm{Arcsin}(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$
(本来は与式は広義積分なので (与式) $= \lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to+0} \int_\varepsilon^{2-\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ と解釈し解くべきである。)

(2) (与式) $= \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x(x^2+1)} = \lim_{M\to\infty} \int_0^M (\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1})dx = \lim_{M\to\infty} (\log \frac{M}{\sqrt{M^2+1}} + \frac{1}{2}\log 2) = \frac{1}{2}\log 2.$

(3) (与式) $= \lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ で、$t = e^x$ とすると $dt = e^x dx$ で $\begin{array}{c|c} x & 0 \to M \\ t & 1 \to e^M \end{array}$. 故に、$\int_0^M \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int_1^{e^M} \frac{dt}{t^2+1} = [\mathrm{Arctan}\,t]_1^{e^M} = \mathrm{Arctan}\,e^M - \mathrm{Arctan}\,1.$ $M\to\infty$ として (与式) $= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$

(4) $0<\varepsilon<1$ に対し $\int_\varepsilon^1 (\log x)^2 dx = \int_\varepsilon^1 x'(\log x)^2 dx = [x(\log x)^2]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 2\log x dx = -\varepsilon(\log\varepsilon)^2 + 2\varepsilon\log\varepsilon + 2(1-\varepsilon)$. よって、$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^{1/2}\log\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\log\varepsilon}{\varepsilon^{-1/2}}$ と変形すると l'Hopital の定理よりその極限は 0 となるので $\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon(\log\varepsilon)^2 = 0$, $\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\log\varepsilon = 0$ となり、(与式) $= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 (\log x)^2 dx = 2.$

(5) $t = 1+\sqrt{x}$ とすると、$x = (t-1)^2$ より $\frac{dx}{dt} = 2t-2$ で $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ t & 1 \to 2 \end{array}$.
よって、(与式) $= \int_1^2 \frac{2t-2}{\sqrt{t}}dt = \int_1^2 (2t^{1/2} - 2t^{-1/2})dt = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$

(6) $t = \frac{\pi}{4} - x$ とすると、$dx = -dt$, $\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\pi}{4} \\ t & \frac{\pi}{4} \to 0 \end{array}$. よって、(与式) $= \int_0^{\pi/4} \log\{1+\tan(\frac{\pi}{4}-t)\}dt = \int_0^{\pi/4} \log\{1 + \frac{1-\tan t}{1+\tan t}\}dt = \int_0^{\pi/4} \log\frac{2}{1+\tan t}dt = \frac{\pi}{4}\log 2 -$ (与式). 故に (与式) $= \frac{\pi}{8}\log 2.$

2 [21] (1) $\frac{2}{\pi}x < \sin x$ $(0<x<1)$ より $\left|\frac{x^{1/2}}{\sin x}\right| \le \frac{\pi}{2}x^{-1/2}$ で、$\int_0^1 x^{-1/2}dx$ は収束するから与式は収束する。

(2) $\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$ より、$t = x^2$ として $\lim_{x\to\infty} x^4 e^{-x^2} = 0$. よって $x^4 e^{-x^2}$ は有界なので $M = \sup\{x^4 e^{-x^2} \mid x \ge 0\}$ とすると $M < \infty$ で $0 \le x^2 e^{-x^2} = \frac{x^4 e^{-x^2}}{x^2} \le \frac{M}{x^2}$. よって、$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ は収束するから与式は収束する。

(3) $(\sin x^4)' = 4x^3\cos x^4$ より $M>0$ に対し、$\int_1^M \cos x^4 dx = \int_1^M \frac{1}{4x^3}(\sin x^4)'dx = \frac{\sin M^4}{4M^3} - \frac{\sin 1}{4} - \int_1^M \frac{\sin x^4}{4x^3}dx.$
ここで、$\left|\frac{\sin M^4}{4M^3}\right| \le \frac{1}{4M^3}$ より挟み打ちの原理より $\lim_{M\to\infty} \frac{\sin M^4}{4M^3} = 0$. また、$\left|\frac{\sin x^4}{4x^3}\right| \le \frac{1}{4x^3}$ で $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ は収束するから $\int_1^\infty \frac{\sin x^4}{4x^3}dx$ も収束する。以上より、$\int_1^\infty \cos x^4 dx$ は収束することがわかった。

3 [7] (与式) $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$. $t = 1+x^2$ とおく $2xdx = dt$, $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ t & 1 \to 2 \end{array}$.
故に $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{2} - 1.$

4 [15] $f(x), xf(x)$ の不定積分をそれぞれ $F(x), G(x)$ と書く、即ち、$F(x) = \int_a^x f(t)dt, G(x) = \int_a^x tf(t)dt$ とする。

(1) $\frac{d}{dx}\{\int_a^{x^2} f(t)dt\} = \frac{d}{dx}\{F(x^2)\} = 2xF'(x^2) = 2xf(x^2).$

(2) $x-t = s$ とおくと $-dt = ds$ で $\begin{array}{c|c} t & a \to b \\ s & x-a \to x-b \end{array}$. よって、$\int_a^b tf(x-t)dt = \int_{x-a}^{x-b} (x-s)f(s)ds = x\int_{x-a}^{x-b} f(s)ds - \int_{x-a}^{x-b} sf(s)ds = x\{F(x-b) - F(x-a)\} - \{G(x-b) - G(x-a)\}$. 故に、$\frac{d}{dx}\{\int_a^b tf(x-t)dt\} = \{F(x-b) - F(x-a)\} + x\{F'(x-b) - F'(x-a)\} - \{G'(x-b) - G'(x-a)\} = \{F(x-b) - F(x-a)\} + x\{f(x-b) - f(x-a)\} - \{(x-b)f(x-b) - (x-a)f(x-a)\} = \int_{x-a}^{x-b} f(s)ds + af(x-a) - bf(x-b)$. 注意[2]

5 [8] $\int_0^\pi e^{-\sin x}dx = \int_0^{\pi/2} e^{-\sin x}dx + \int_{\pi/2}^\pi e^{-\sin x}dx = \int_0^{\pi/2} e^{-\sin x}dx + \int_0^{\pi/2} e^{-\sin(\pi-t)}dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-\sin x}dx.$
(ここでは $x = \pi - t$ と置換した。) $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ より $e^{-x} < e^{-\sin x} < e^{-\frac{2}{\pi}x}$. よって、$2\int_0^{\pi/2} e^{-x}dx < 2\int_0^{\pi/2} e^{-\sin x}dx < 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}x}dx.$
ここで、$2\int_0^{\pi/2} e^{-x}dx = 2[e^{-x}]_0^{\pi/2} = 2(1-e^{-\frac{\pi}{2}}) > 2(1-\frac{1}{e})$. (注：$1 < \frac{\pi}{2}$ より $e^{-1} > e^{-\frac{\pi}{2}}$.)
また、$2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}x}dx = \pi(1-\frac{1}{e})$ より、以上をまとめて $2(1-\frac{1}{e}) < \int_0^\pi e^{-\sin x}dx < \pi(1-\frac{1}{e})$ を得る。

6 [10] ヒントで $f(c) = 0$ なら $0 = 0$ として明らかに与式は成立する。$f(c) > 0$ のとき $f(c) - \varepsilon > 0$ としてヒントの式より、$\{f(c)-\varepsilon\}^n\delta < \int_a^b f(x)^n dx \le \int_a^b f(c)^n dx = f(c)^n(b-a)$. 故に $\{f(c)-\varepsilon\}\delta^{\frac{1}{n}} < \{\int_a^b f(x)^n dx\}^{\frac{1}{n}} \le f(c)(b-a)^{\frac{1}{n}}$. (ここで $\delta < b-a$ として一般性を失わないことを用いる。) これより $f(c) - \varepsilon \le \liminf_{n\to\infty}\{\int_a^b f(x)^n dx\}^{\frac{1}{n}} \le \limsup_{n\to\infty}\{\int_a^b f(x)^n dx\}^{\frac{1}{n}} \le f(c)$. 今 $\varepsilon > 0$ は任意なので $\varepsilon \to +0$ として $f(c) \le \liminf_{n\to\infty}\{\int_a^b f(x)^n dx\}^{\frac{1}{n}} \le \limsup_{n\to\infty}\{\int_a^b f(x)^n dx\}^{\frac{1}{n}} \le f(c)$ を得る。よって、上極限と下極限が一致して $f(c)$ となるので、極限は存在し $\lim_{n\to\infty}\{\int_a^b f(x)^n dx\}^{\frac{1}{n}} = f(c) = \max\{\, f(x) \mid a \le x \le b \,\}$ となる。

---

[1] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。[ ] 内は配点で満点は 101 点である。

[2] この解答で $\frac{d}{dx}\{\int_a^b F(x-t)dt\} = \int_a^b F'(x-t)dt$ を用いる解答が数名いた。これは自明な式ではなく教科書 p.246 にある**定理 1** を用いた解答と解釈できる。これを利用するためには多くの条件の check を必要とする。授業で取り上げなかった定理を用いることは構わないが、それを明記しない、更には条件を check していない解答は正解とは言えず、そのため不正解とした。

微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2001 年 8 月 2 日の試験の解答の要点[3]

1 Taylor の公式より $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\frac{f'''(a+\alpha h)}{3!}h^3$, $f''(a+\theta h)=f''(a)+\theta hf'''(a+\beta\theta h)$ $(0<\alpha,\beta<1)$. これと問題の式より $\theta f'''(a+\beta\theta h)=\frac{1}{3}f'''(a+\alpha h)$. よって、$f'''(x)$ が連続で $f'''(a)\neq 0$ より $h\to 0$ として $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{3}$ を得る。

2 $\alpha=\frac{a+b}{2},\beta=\frac{b-a}{2}$ とかく。$\varphi(x)=f(x+\alpha)-f(-x+\alpha)-2xf'(\alpha),\psi(x)=8x^3$ とすると、$\varphi(0)=\varphi'(0)=0,\psi(0)=\psi'(0)=0$ より Cauchy の平均値の定理を 2 回用いると $\frac{\varphi(\beta)}{\psi(\beta)}=\frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\psi(\beta)-\psi(\alpha)}=\frac{\varphi'(\gamma_1)}{\psi'(\gamma_1)}=\frac{\varphi(\gamma_1)-\varphi(\alpha)}{\psi(\gamma_1)-\psi(\alpha)}=\frac{\varphi'(\gamma)}{\psi'(\gamma)}=\frac{f''(\gamma+\alpha)-f''(-\gamma+\alpha)}{24\cdot 2\gamma}$ となる $0<\gamma<\gamma_1<\beta$ が存在する。更に、平均値の定理より $\frac{f''(\gamma+\alpha)-f''(-\gamma+\alpha)}{2\gamma}=f'''(c)$ となる $-\gamma+\alpha<c<\gamma+\alpha$ が存在する。よって、$a=-\beta+\alpha<c<\beta+\alpha=b$ なる c が存在して $\frac{\varphi(\beta)}{\psi(\beta)}=\frac{f'''(c)}{24}$ が成立するが、これを変形して与式を得る。

3 授業中に示したので略。

4 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{1/200}}=0$ を示せば (与式) $=0$ がわかる。これは 6/14 の試験 **5** (2) の解答で示した $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{\beta}}=0$ の $\beta=1/200$ の場合である。

(2) $t=\frac{\pi}{2}-x$ とおくと $x\to\frac{\pi}{2}-0$ のとき $t\to+0$. (与式) $=\lim\limits_{t\to+0}\frac{\log t}{\tan(\frac{\pi}{2}-t)}$. これは $\frac{-\infty}{\infty}$ で不定形で $\{\log t\}'=\frac{1}{t},\{\tan(\frac{\pi}{2}-t)\}'=\frac{-1}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-t)}=\frac{-1}{\sin^2 t}$ で $\lim\limits_{t\to+0}\frac{1/t}{-1/\sin^2 t}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{-\sin^2 t}{t}=0$. 故に、l'Hopital の定理より (与式) $=0$.

(3) 与式は $\frac{0}{0}$ で不定形。$\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^x-x)'}{(1-x+\log x)'}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x(\log x+1)-1}{-1+1/x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{x+1}(\log x+1)-x}{-x+1}$. これも $\frac{0}{0}$ で不定形。$\lim\limits_{x\to1}\frac{\{x^{x+1}(\log x+1)-x\}'}{(-x+1)'}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{x+1}(\log x+\frac{x+1}{x})(\log x+1)+x^x-1}{-1}=-2$. よって l'Hopital の定理を 2 回用いることで (与式) $=-2$.

(4) $t=\frac{1}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $t\to+0$、よって (与式) $=\lim\limits_{t\to+0}\frac{t^2-\log(1+t^2)}{t^3}$. これは $\frac{0}{0}$ で不定形。$\{t^2-\log(1+t^2)\}'=2t-\frac{2t}{1+t^2}$ で $\lim\limits_{t\to+0}\frac{t^2-\frac{2t}{1+t^2}}{3t^2}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{2t}{3(1+t^2)}=0$. 故に、l'Hopital の定理より (与式) $=0$.

(6) 与式の代わりに対数をとり $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log\frac{\sin x}{x}}{x^2}$ を考える。これは $\frac{\infty}{\infty}$ で不定形。$\lim\limits_{x\to0}\frac{(\log\frac{\sin x}{x})'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}\frac{x}{\sin x}=-\frac{1}{6}$. ここで、$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}=-\frac{1}{6}$ を用いた。これは、$\frac{0}{0}$ で不定形で $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(2x^3)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x\sin x}{6x^2}=-\frac{1}{6}$ より l'Hopital の定理から従う。以上より、l'Hopital の定理から $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log\frac{\sin x}{x}}{x^2}=-\frac{1}{6}$ となり (与式) $=e^{-1/6}$ を得る。

5 (1) $f(x)=\mathrm{Arcsin}\,x-\sin x$ とおくと $f(0)=f'(0)=f''(0)=0,f'''(0)=2$ より 3 位の無限小。

(2) $f(0)=f'(0)=f''(0)=0,f'''(0)\neq 0$ となる a を定めればよい。$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{1+x}+\frac{1}{a}\frac{(-a)^n n!}{(1+ax)^{n+1}}$ $(n\geq 0)$ より $f(0)=f'(0)=0$ で $f''(0)=-1+\frac{1}{a}\frac{2a^2}{1}=2a-1=0$ より $a=1/2$. このとき $f'''(0)=2-6a^2=\frac{2}{3}\neq 0$ より、$a=1/2$ となる。

6 ヒントより $\varphi(x)$ が $x\to0$ のとき 4 位以上の無限小になるように α を定めると $\varphi(x)=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\frac{\alpha}{2}(\cos 5x-\cos x)$ と $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=\varphi'''(0)=0$ より $\alpha=\frac{1}{6}$. 一方、Taylor の公式より $\varphi(x)=\frac{\varphi^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4$ $(0<\theta<1)$ より、$\beta=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{1}{\sin 2x}\frac{1}{\sin 3x}-\frac{\alpha}{\sin^2 x}\right\}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi^{(4)}(\theta x)x^4/4!}{6x^4}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\frac{2x}{\sin 2x}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{\varphi^{(4)}(0)}{4!\times 6}=\frac{11}{36}$.

評価　解答用紙に記入してある ABCD は順に数学序論演習 I, 微分積分学 AD I の成績です。A は優, B は良, C は可, D は不可を表します。基準は 7 回の試験の点を順に $a_1,a_2,\ldots,a_7$ とするとき $s=a_1+a_2+a_3+\max\{a_4,a_7\}+a_5+a_6, s'=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$ として、合計点 s が 180 点以下は DD, 181 ∼ 200 点は CC, 201 ∼ 215 点は BC, 216 ∼ 265 点は BB, 266 ∼ 300 点は AB, 301 点以上は AA としました。但し、$s'\geq 340$ のときは AA, $s'\geq 200$ のときは CC のいずれかよい方となるように補正しました。その横にある数字は順に合計点数 s,s' です。
今期勉強したことは後期の微分積分学 AD　や解析学序論に引き続き勉強する事柄でありそれ以上に今後 4 年間勉強する解析系幾何系科目や確率統計などの基礎となる事柄です。不合格だった人はこれを教訓として微分積分学 AD　こそは合格するように (後期は既に合格している人は来年と解析学序論制覇を目標に)、合格した人も微分積分学 AD　と解析学序論の合格を目標に夏休み復習に励んでください。
夏休みの勉強はとても大切です。私の例で恐縮ですが、僕は 1 年次の夏休みに ε-δ 論法を使えるように訓練しました。そのおかげで解析系科目の勉強がすごく楽になったと思ってます。皆さんもそうなってくれるとうれしいです。参考書や勉強していて不明なことは杉浦をはじめどの数理科学科教官もこたえてくれると思います。

---

[3] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。配点は **1–3, 6** が各 10 点、**4,5** が各 8 点で、満点は 96 点である。