微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2002 年 6 月 28 日の試験の解答の要点[1]

1 (1) $t = \mathrm{Arcsin}\, x$ とおくと $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ で、$x = \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = \cos t$. よって、$\int (\mathrm{Arcsin}\, x)^2 dx = \int t^2 \cos t dt = \cdots = t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t = x(\mathrm{Arcsin}\, x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}\, x - 2x$ を得る。最後の $=$ は $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \ge 0$ となるから $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ を用いた。

(2) $\frac{3x^5}{x^3-1} = 3x^2 + \frac{3x^2}{x^3-1}$ で $\frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ とおくと、$A+B=3, A-B+C=0, A-C=0$ より $A=1, B=2, C=1$. 故に、$\int \frac{3x^5}{x^3-1} dx = \int \{3x^2 + \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}\} dx = x^3 + \log|x-1| + \log(x^2+x+1)$.

(3) $t = \tan\frac{x}{2}$ とすると、$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt, \sin t = \frac{2t}{1+t^2}, \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ より
$\int \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)} dx = \int \frac{1-t^2}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}$.

(4) $t = \tan x$ とすると、$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt, \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$ より
$\int \frac{1}{1+3\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\, 2t = \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\, 2\tan x$.

(5) $t = x + \sqrt{x^2+1}$ とすると、$x = \frac{t^2-1}{2t}$ より $dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt$.
よって、$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{t^2+1}{2t^3}\,dt = \frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{4}\frac{1}{t^2} = \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{4(x+\sqrt{x^2+1})^2}$.

(6) $t = \sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$ とすると、$x = \frac{t^2+2}{t^2+1}$ より $dx = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt$. 故に $\int \sqrt{\frac{2-x}{x-1}}\,dx = -2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = -2\int \{\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(t^2+1)^2}\}\,dt$. ここで、$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{t}{2}\left(-\frac{1}{t^2+1}\right)'\,dt = -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$ より、$\int \sqrt{\frac{2-x}{x-1}}\,dx = \frac{t}{t^2+1} - \mathrm{Arctan}\, t = (x-1)\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} - \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} = \sqrt{(2-x)(x-1)} - \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$.
最後の $=$ は $\frac{2-x}{x-1} \ge 0$ より $1 < x \le 2$ となることを用いた。

(7) $t = \sqrt[4]{x}$ とすると、$x = t^4$ より $dx = 4t^3\,dt$. 故に $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{4t^4}{t^2+1}\,dt = 4\int \{t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\}\,dt = 4(\frac{1}{3}t^3 - t + \mathrm{Arctan}\, t) = 4(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x} + \mathrm{Arctan}\,\sqrt[4]{x})$.

(8) $t = x^3$ とすると $dx = \frac{1}{3}t^{-2/3}\,dt$ より、$\int \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{t+1}}{3t}\,dt$. 更に、$u = \sqrt{t+1}$ とおくと $dt = 2u\,du$ より $\int \frac{\sqrt{t+1}}{3t}\,dt = \int \frac{2u^2}{3(u^2-1)}\,du = \frac{1}{3}\int (2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1})\,du = \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}\log|\frac{u-1}{u+1}| = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + \frac{1}{3}\log|\frac{\sqrt{x^3+1}-1}{\sqrt{x^3+1}+1}|$.

2 (1) 与式より $\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = -\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. $(\sqrt{1+t^2})' = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ より $\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} = C$ (C は任意定数) を得る。

(2) 両辺を x^3 で割って $(\frac{y}{x})^2 y' = 1 + (\frac{y}{x})^3$. $z = \frac{y}{x}$ とおくと $y = xz$ より $y' = z + xz'$. 故に、$z^2(z+xz') = 1+z^3$ より $z^2 dz = \frac{dx}{x}$. 積分して $\frac{1}{3}z^3 = \log|x| + C$. 以上より $y^3 = 3x^3(\log|x| + C)$ (C は任意定数).

(3) ヒントより $\alpha = 1, \beta = -3$ だから $x = u+1, y = v-3$ とおくと $\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}/\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$. これより与式は $(1-\frac{v}{u})\frac{dv}{du} = 1 + \frac{v}{u}$ となる. 同次形だから $z = \frac{v}{u}$ とおくと、$(1-z)(z + u\frac{dz}{du}) = 1+z$. これを解いて $\mathrm{Arctan}\, z - \frac{1}{2}\log(1+z^2) = \log|u| + C$. 最後に $u = x-1, z = \frac{y+3}{x-1}$ を代入し整理すると $\mathrm{Arctan}\,\frac{y+3}{x-1} = \frac{1}{2}\log\{(x-1)^2 + (y+3)^2\} + C$ (C は任意定数) となる。

(4) $z = y^2$ とすると $\frac{dz}{dx} = 2yy'$ より、$\frac{dz}{dz} + z = 2\cos x$. これは 1 階線形方程式だからまず $\frac{dz}{dz} + z = 0$ を解いて $z = Ae^{-x}$ (A は任意定数) を得る。よって、$z = A(x)e^{-x}$ とおくと、$z' + z = A'(x)e^{-x} = 2\cos x$ より $A'(x) = 2e^x \cos x$. 故に $A(x) = 2\int e^x \cos x\,dx = e^x(\cos x + \sin x) + C$. (部分積分を 2 回用い整理すればこれは得られる。) 以上より、$y^2 = \cos x + \sin x + Ce^{-x}$ (C は任意定数) を得る。

3 $y' = 12x^3 + 12x^2$, $y' = 0$ より $x = 0, -1$.
$y'' = 36x^3 + 24x^2$, $y'' = 0$ より $x = 0, -2/3$. より増減表を書くと

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
y'	／	$-$	0	$+$	／	$+$	0	$+$	／
y''	／	$+$	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
y	∞		-1		$-\frac{16}{27}$		0		∞

以上よりグラフは右のようになる。(漸近線は存在しない。)

[1]**注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。また、計算間違いを含む可能性もある。尚、配点は各 7 点で、満点は 91 点である。(**変更しました。**) 平均点は 40.3 点でした。