微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2001 年 6 月 14 日の試験の解答の要点[1]

1 [10]　(1)　$f(x)=f(a)$ $(a<x\le b)$ を示せばよい。平均値の定理より $f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$ をみたす $a<c<x$ が存在する。ここで $f'(c)=0$ より $f(x)=f(a)$ を得る。

(2)　$f(x)=\mathrm{Arccos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\mathrm{Arctan}\,x$ とおくと $f'(x)=$ (計算略) $=0$. (ここで $\sqrt{x^2}=x$ のため $x>0$ が必要となる。) よって、(1) より $\forall x>0$ に対し $f(x)=f(1)$ を得るが、$f(1)=\mathrm{Arccos}\frac{1}{\sqrt2}-\mathrm{Arctan}\,1=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$. 従って、$f(x)=0$ $(x>0)$ となる。

2 [10]　$a\in\mathbf{R}$ に対し、Taylor の公式より $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a+\theta(x-a))(x-a)^2$ なる $0<\theta<1$ が存在する。よって、$f''(x)\ge0$ より $f(x)\ge f'(a)(x-a)+f(a)$ となるが、この式は曲線 $y=f(x)$ がその接線 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ の上側にあることを意味している。

3 [20]　(1)　$f(x)=\cos x$ とすると $f^{(n)}(0)=(-1)^m$ $(n=2m)$, $=0$ $(n=2m+1)$. Taylor の公式より $f(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{m-1}}{2(m-1)!}+R_{2m}$, $R_{2m}=\frac{(-1)^m\cos\theta x}{(2m)!}x^{2m}$ $(0<\theta<1)$. ここで、$\forall x\in\mathbf{R}$ に対し $0\le|R_{2m}|\le\frac{|x|^{2m}}{(2m)!}$ より $R_{2m}\to0$ $(m\to\infty)$ となる。以上より、$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ を得る。

(2)　$\sin^2 x=\frac12-\frac12\cos 2x=\frac12-\frac12\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}(2x)^{2m}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}2^{2m}}{2(2m)!}x^{2m}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}$. (最後の等号は $n=m-1$ として変形整理した。)

4 [50]　(1)　与式は $\frac00$ で不定形。$(\sin x-\mathrm{Arcsin}\,x)'=\cos x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(x^3)'=3x^2$ で $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$ $=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{3x^2}+\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{3x^2}+\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{-\sin^2 x}{3x^2(\cos x+1)}+\frac{1-x^2-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)}\right)$ $=-\frac16-\frac16=-\frac13$. よって l'Hopital の定理[2]より (与式) $=-\frac13$.

(2)　$\frac{x^2}{e^x}\to0$ $(x\to\infty)$ より、(与式) $=\lim_{x\to\infty}e^x\log x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\frac{1}{\log x}\right)=\infty$.

(3)　与式は $\frac00$ で不定形。$(e-e^{\cos x})'=e^{\cos x}\sin x$, $(x^2)'=2x$ で $\lim_{x\to0}\frac{e^{\cos x}\sin x}{2x}=\frac{e}{2}$. よって l'Hopital の定理より (与式) $=\frac{e}{2}$.

(4)　$\log(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n$ $(|t|<1)$ より $x\to\infty$ のとき $x-x^2\log(1+\frac1x)=x-x^2\{\frac1x-\frac12\frac{1}{x^2}+O(\frac{1}{x^3})\}=\frac12+O(\frac1x)$. よって (与式) $=\frac12$.

[別解]　$t=\frac1x$ とおくと $x\to\infty$ のとき $t\to+0$、よって (与式) $=\lim_{t\to+0}\frac{t-\log(1+t)}{t^2}$. これは $\frac00$ で不定形。$\{t-\log(1+t)\}'=1-\frac{1}{1+t}$ で $\lim_{t\to+0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac12$. 故に、l'Hopital の定理より (与式) $=\frac12$.

(5)　与式の代わりに対数をとり $\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,x)}{x}$ を考える。これは $\frac{-\infty}{\infty}$ で不定形。$(\log(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,x))'=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,x}(-\frac{1}{1+x^2})$ で $\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,x}$ も $\frac00$ で不定形。$(-\frac{1}{1+x^2})'=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$ で $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=0$. よって l'Hopital の定理を 2 回用い $\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,x)}{x}=0$, 即ち (与式) $=e^0=1$ を得る。

(6)　$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)$ $(x\to0)$ より $\frac{1}{x^2}(\frac{\sin}{x}-1)\to-\frac{1}{3!}$, $\frac{1}{x^2}(\cos x-1)\to-\frac12$ を得る。よって、$\lim_{t\to0}(1+t)^{1/t}=e$ より、(与式) $=(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}=[\{1+(\frac{\sin x}{x}-1)\}^{1/(\frac{\sin x}{x}-1)}]^{\frac{1}{x^2}(\frac{\sin x}{x}-1)}\times$ $[\{1+(\cos x-1)\}^{1/(\cos x-1)}]^{-\frac{1}{x^2}(\cos x-1)}\to e^{-1/6}e^{1/2}=e^{1/3}$ を得る。

[別解]　与式の代わりに対数をとり $\lim_{x\to0}\frac{\log\frac{\tan x}{x}}{x^2}$ を考える。これは $\frac{\infty}{\infty}$ で不定形。$\{x^2\}'=2x$, $\left\{\log\frac{\tan x}{x}\right\}'=\frac{x}{\tan x}\left(\frac{1}{x\cos^2 x}-\frac{\tan x}{x^2}\right)=\frac{2}{\sin 2x}-\frac1x$.[3] 今、$\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{\sin 2x}-\frac1x}{2x}=\lim_{x\to0}2\cdot\frac{2x-\sin 2x}{(2x)^3}\frac{2x}{\sin 2x}=\frac13$. ここで、$\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\frac16$ を用いた。これは、$\frac00$ で不定形で $\lim_{t\to0}\frac{(t-\sin t)'}{(t^3)'}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{3t^2(1+\cos t)}=\frac16$ より l'Hopital の定理から従う。以上より、l'Hopital の定理から $\lim_{x\to0}\frac{\log\frac{\tan x}{x}}{x^2}=\frac13$ となるから (与式) $=e^{1/3}$ が従う。

---

[1] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は 120 点である。

[2] 不定形であることを断らずに l'Hopital の定理も用いた場合 1 回につき 3 点減点した。(2) 以降も同じ。

[3] ここで $\log\frac{\tan x}{x}=\log\tan x-\log x$ と変形はできない。$\log x$ の定義域は $x>0$ であるから、$x<0$ の場合この右辺は定義されない。$x\to0$ と書いた場合 $x<0$ の場合も考慮する必要がある。

5 [15] (1) $\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=(\frac{\sin x}{x})^3\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\to\frac{1}{2}\ (x\to 0)$. よって $\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ は $x=0$ の近くで有界のため、$\tan x-\sin x=O(x^3)\ (x\to 0)$.

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^{1000}}{x^\alpha}=0$ を示せばよいが、このためには $\beta=\frac{\alpha}{1000}$ として $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\beta}=0$ を示せばよい。これは $\frac{\infty}{\infty}$ より不定形で $(\log x)'=\frac{1}{x}$, $(x^\beta)'=\beta x^{\beta-1}$ で $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\beta x^{\beta-1}}=0$ より l'Hopital の定理より従う。

6 [15] $\log(1+x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\ (|x|<1)$ より $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+O(x^5)\ (x\to 0)$.
$\frac{1}{1-r}=\sum_{n=0}^\infty r^n\ (|r|<1)$ より $\frac{1}{1+ax}=1-ax+a^2x^2-a^3x^3+O(x^4)\ (x\to 0)$.
よって、$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-x(1+bx)\{1-ax+a^2x^2-a^3x^3\}+O(x^5)=(a-b-\frac{1}{2})x^2+(-a^2+ab+\frac{1}{3})x^3+(-a+a^2b-\frac{1}{4})x^4+O(x^5)$ であるがこれが 4 位の無限小だから $a-b-\frac{1}{2}=0, -a^2+ab+\frac{1}{3}=0, -a+a^2b-\frac{1}{4}\neq 0$ であればよい。これを解いて $a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{6}$ を得る。

[別解] $f(x)$ が $x\to 0$ のとき 4 次の無限小となるから $f(0)=f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)$ で $f^{(4)}(0)\neq 0$ となるように a,b を決めればよい。このため、$f(x)=\log(1+x)-\left\{\frac{b}{a}x+\frac{1}{a}\left(1-\frac{b}{a}\right)\right\}+\frac{1}{a}\left(1-\frac{b}{a}\right)\frac{1}{1+ax}$ と変形すると、$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{b}{a}+\frac{1}{a}\left(1-\frac{b}{a}\right)\frac{(-a)}{(1+ax)^2}$, $f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1+x}+\frac{1}{a}\left(1-\frac{b}{a}\right)\frac{(-a)^k k!}{(1+ax)^{k+1}}\ (k\geq 2)$. よって、$f(0)=f'(0)=0$ で $f''(0)=-1+2(a-b)=0, f^{(3)}(0)=2-6a(a-b)=0$. これを解いて $a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{6}$ を得る。このとき、$f^{(4)}(0)=-\frac{2}{3}\neq 0$ となり、$f(x)$ が $x\to 0$ のとき 4 次の無限小となる。

連絡 今後の試験の予定

6 月 28 日 (金)　試験範囲は連絡済につき略。
7 月 19 日 (金)　試験範囲は第 4 章 §§ 1–4(I) で、問 **1–18**, 演習問題 **A 1–13**, **B 15–28** (変更の可能性あり)
8 月 2 日 (金)　第 2 章 § 2, § 3 (I) とします。(今回の試験の出来が悪いので再度この範囲で試験を行う。)
尚、7 月 16 日 (火)、23 日 (火)、26 日 (金)、30 日 (火) は休講です。(7 月 15 日から 31 日まで杉浦は出張です。)