微分積分学 **AD I**, 数学序論演習 **I**　　2001 年 5 月 31 日の試験の解答の要点[1]

1 [10] (1) $\mathrm{Arcsin}(-\frac{1}{2}) = x$ とおくと $\sin x = -\frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ より $x = -\frac{\pi}{6}$.
$\mathrm{Arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = y$ とおくと $\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ より $y = \frac{5}{6}\pi$

(2) $a = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{3}, b = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7}$ とすると $\tan a = \frac{1}{3}, \tan b = \frac{1}{7}$. $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ より $0 < b < a < \frac{\pi}{6}$, よって $0 < 2a + b < \frac{\pi}{2}$ を得る。一方、$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} = \frac{3}{4}$ より $\tan(2a+b) = \frac{\tan 2a + \tan b}{1 - \tan 2a \tan b} = 1$. [2]以上より、$2a + b = \frac{\pi}{4}$ となる。

2 [10] $\mathrm{Arcsin}\, x$ の定義域は $-1 \le x \le 1$ より x が $f(x)$ の定義域に属するなら $-1 \le \frac{x+1}{x-1} \le 1$ を満たす。$x > 1$ のとき $-(x-1) \le x+1 \le x-1$ であるがこれを満たす x は存在しない。$x < 1$ のとき $-(x-1) \ge x+1 \ge x-1$ より $x \le 0$. よって $f(x)$ の定義域は $x \le 0$.
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{|x-1|}{\sqrt{-4x}} \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(1-x)\sqrt{-x}}$. ($x \le 0$ より $|x-1| = 1-x$ に注意せよ。)

3 [10] $f'_+(0) = \lim_{h\to+0} \frac{\sqrt{2h+1}-1}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{2h}{h(\sqrt{2h+1}+1)} = 1$. $f'_-(0) = \lim_{h\to-0} \frac{ah^2+bh+1-1}{h} = b$.
$f'_+(0) = f'_-(0)$ のとき $f'(0)$ が存在するので、$b = 1$ のときのみ $f'(0)$ は存在し、$f'(0) = 1$.

4 [10] (1) $\left(x^{\sin x}\right)' = \left(e^{(\sin x)\log x}\right)' = x^{\sin x}\{(\cos x)\log x + \frac{\sin x}{x}\}$.

(2) (与式)$' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$.

5 [10] $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1+\frac{1}{t^2}}{1-\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$.　$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{4t}{(t^2-1)^2}}{1-\frac{1}{t^2}} = -\frac{4t^3}{(t^2-1)^3}$.

6 [15] (1) Leibniz の公式より $\left(x^2e^x\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(x^2\right)^{(k)} \left(e^x\right)^{(n-k)} = x^2e^x + 2nxe^x + n(n-1)e^x$.

(2) $\cos 3x \cos x = \cos 4x + \cos 2x$ で $(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos(ax + \frac{n}{2}\pi)$ より[3]、
$(\cos 3x \cos x)^{(n)} = 4^n \cos(4x + \frac{n}{2}\pi) + 2^n \cos(2x + \frac{n}{2}\pi)$.

(3) $\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ で $\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$ より[4]、$\left(\frac{1}{x^2-x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

7 [15] (1) $\left(e^{-x}\right)^{(k)} = (-1)^k e^{-x}$, $\left(x^n\right)^{(n-k)} = \frac{n!}{k!}x^k$ に注意すると、Leibniz の公式より
$e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) = e^x \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(e^{-x}\right)^{(k)} \left(x^n\right)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (-1)^k \frac{n!}{k!} x^k$ となり多項式とわかる。

(2) $z = x^n e^{-x}$ とおくと $z' = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$ より $xz' = (n-x)z$. この両辺を $n+1$ 回微分すると Leibniz の公式より $(xz')^{(n+1)} = (n+1)z^{(n+1)} + xz^{(n+2)}$, $\{(n-x)z\}^{(n+1)} = -(n+1)z^{(n)} + (n-x)z^{(n+1)}$ より
$xz^{(n+2)} + (x+1)z^{(n+1)} + (n+1)z^{(n)} = 0$.
$L_n = e^x z^{(n)}$ より $z^{(n)} = e^{-x}L_n$, $z^{(n+1)} = e^{-x}(L'_n - L_n)$, $z^{(n+2)} = e^{-x}(L''_n - 2L'_n + L_n)$ を代入して
$xe^{-x}(L''_n - 2L'_n + L_n) + (x+1)e^{-x}(L'_n - L_n) + (n+1)e^{-x}L_n = 0$. 整理して $xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$ を得る。

---

[1]注意　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。また、解法は一種類ではない。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は 80 点である。

[2]$\tan(2a+b) = 1$ だけでは、$2a + b = \frac{\pi}{4} + n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$ しかわからないが、$0 < 2a + b < \frac{\pi}{2}$ を別途示したので $2a + b = \frac{\pi}{4}$ を得る。

[3]数学的帰納法によって示す。示していない場合減点した。

[4]数学的帰納法によって示す。示していない場合減点した。