微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2001 年 5 月 31 日の試験の解答の要点[1]

1 [10] (1) $\mathrm{Arcsin}(-\frac{1}{2})=x$ とおくと $\sin x=-\frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ より $x=-\frac{\pi}{6}$.
$\mathrm{Arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{2})=y$ とおくと $\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ より $y=\frac{5}{6}\pi$

(2) $a=\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{3}, b=\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7}$ とすると $\tan a=\frac{1}{3},\tan b=\frac{1}{7}$. $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ より $0<b<a<\frac{\pi}{6}$, よって $0<2a+b<\frac{\pi}{2}$ を得る。一方、$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}=\frac{3}{4}$ より $\tan(2a+b)=\frac{\tan 2a+\tan b}{1-\tan 2a\tan b}=1$. [2]以上より、$2a+b=\frac{\pi}{4}$ となる。

2 [10] $\mathrm{Arcsin}\,x$ の定義域は $-1\le x\le 1$ より x が $f(x)$ の定義域に属するなら $-1\le\frac{x+1}{x-1}\le 1$ を満たす。$x>1$ のとき $-(x-1)\le x+1\le x-1$ であるがこれを満たす x は存在しない。$x<1$ のとき $-(x-1)\ge x+1\ge x-1$ より $x\le 0$. よって $f(x)$ の定義域は $x\le 0$.
$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{|x-1|}{\sqrt{-4x}}\frac{-2}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(1-x)\sqrt{-x}}$. ($x\le 0$ より $|x-1|=1-x$ に注意せよ。)

3 [10] $f'_+(0)=\lim_{h\to+0}\frac{\sqrt{2h+1}-1}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{2h}{h(\sqrt{2h+1}+1)}=1$. $f'_-(0)=\lim_{h\to-0}\frac{ah^2+bh+1-1}{h}=b$.
$f'_+(0)=f'_-(0)$ のとき $f'(0)$ が存在するので、$b=1$ のときのみ $f'(0)$ は存在し、$f'(0)=1$.

4 [10] (1) $\left(x^{\sin x}\right)'=\left(e^{(\sin x)\log x}\right)'=x^{\sin x}\{(\cos x)\log x+\frac{\sin x}{x}\}$.

(2) $(与式)'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$.

5 [10] $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\frac{1}{t^2}}{1-\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2+1}{t^2-1}$.　$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{4t}{(t^2-1)^2}}{1-\frac{1}{t^2}}=-\frac{4t^3}{(t^2-1)^3}$.

6 [15] (1) Leibniz の公式より $\left(x^2e^x\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^n {}_n\mathrm{C}_k\left(x^2\right)^{(k)}\left(e^x\right)^{(n-k)}=x^2e^x+2nxe^x+n(n-1)e^x$.

(2) $\cos 3x\cos x=\cos 4x+\cos 2x$ で $(\cos ax)^{(n)}=a^n\cos(ax+\frac{n}{2}\pi)$ より[3]、
$(\cos 3x\cos x)^{(n)}=4^n\cos(4x+\frac{n}{2}\pi)+2^n\cos(2x+\frac{n}{2}\pi)$.

(3) $\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$ で $\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$ より[4]、$\left(\frac{1}{x^2-x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

7 [15] (1) $\left(e^{-x}\right)^{(k)}=(-1)^ke^{-x}$, $\left(x^n\right)^{(n-k)}=\frac{n!}{k!}x^k$ に注意すると、Leibniz の公式より
$e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^{-x}\right)=e^x\sum_{k=0}^n {}_n\mathrm{C}_k\left(e^{-x}\right)^{(k)}\left(x^n\right)^{(n-k)}=\sum_{k=0}^n {}_n\mathrm{C}_k(-1)^k\frac{n!}{k!}x^k$ となり多項式とわかる。

(2) $z=x^ne^{-x}$ とおくと $z'=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}$ より $xz'=(n-x)z$. この両辺を $n+1$ 回微分すると Leibniz の公式より $(xz')^{(n+1)}=(n+1)z^{(n+1)}+xz^{(n+2)}$, $\{(n-x)z\}^{(n+1)}=-(n+1)z^{(n)}+(n-x)z^{(n+1)}$ より $xz^{(n+2)}+(x+1)z^{(n+1)}+(n+1)z^{(n)}=0$.
$L_n=e^xz^{(n)}$ より $z^{(n)}=e^{-x}L_n$, $z^{(n+1)}=e^{-x}(L_n'-L_n)$, $z^{(n+2)}=e^{-x}(L_n''-2L_n'+L_n)$ を代入して $xe^{-x}(L_n''-2L_n'+L_n)+(x+1)e^{-x}(L_n'-L_n)+(n+1)e^{-x}L_n=0$. 整理して $xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0$ を得る。

---

[1] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。また、解法は一種類ではない。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は 80 点である。

[2] $\tan(2a+b)=1$ だけでは、$2a+b=\frac{\pi}{4}+n\pi$ ($n\in\mathbf{Z}$) しかわからないが、$0<2a+b<\frac{\pi}{2}$ を別途示したので $2a+b=\frac{\pi}{4}$ を得る。

[3] 数学的帰納法によって示す。示していない場合減点した。

[4] 数学的帰納法によって示す。示していない場合減点した。