微分積分学 AD I, 数学序論演習 I　　2001 年 5 月 21 日の試験の解答の要点[1]

1 [10] (1) $\forall\varepsilon>0$ に対して $M>0$ が存在して $x\geq M$ ならば $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$.

(2) $\lim_{x\to\infty}\sin x=\alpha$ と仮定する。(1) で $\varepsilon=1/2$ とすると、$M>0$ が存在して $x\geq M$ ならば $|\sin-\alpha|<1/2$, 即ち、$\alpha-1/2<\sin<\alpha+1/2$. 一方、$\sin x$ は $x\geq M$ におてい $[-1,1]$ のすべての値をとるので、矛盾。
(別解) $\lim_{x\to\infty}\sin x=\alpha$ と仮定する。このとき、$x_n\to\infty\ (n\to\infty)$ なる任意の $\{x_n\}$ に対し、$\lim_{n\to\infty}\sin x_n=\alpha$ となる[2]。一方、$\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,\ \lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\pi/2)=1$ となるので矛盾する。

2 [35] (1) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),\ c^4-d^4=(c-d)(c+d)(c^2+d^2)$ を $a=(1+2x)^{1/3}, b=(1-2x)^{1/3}, c=(1+x)^{1/4}, d=1$ に用いれば、(与式)$=\lim_{x\to0}\frac{1+x-1}{(c+d)(c^2+d^2)}\frac{a^2+ab+b^2}{1+2x-(1-2x)}=\frac{1}{4}\frac{1+1+1}{(1+1)(1+1)}=\frac{3}{16}$.

(2) $x<1$ のとき $|x-1|=-(x-1)$ より、(与式)$=\lim_{x\to1-0}\frac{(x+3)(x-1)}{-(x-1)}=-4$.

(3) (与式)$=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\frac{x-1}{\sin(x-1)}\frac{x^2-1}{x-1}=1\cdot1\cdot(1+1)=2$.

(4) (与式)$=\lim_{x\to0}\left\{(1-2x+x^2)^{1/(-2x+x^2)}\right\}^{(-2x+x^2)/x}=e^{-2}$.

(5) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ より $\cos\sqrt{x+1}-\cos x=-2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$. よって、$|\cos\sqrt{x+1}-\cos x|\leq2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right|\to0\ (x\to\infty)$ より 挟みうちの原理 から (与式)$=0$ を得る[3]。

(6) $t=-x$ とおくと、$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ より、$(2^x+3^x)^{1/x}=(2^{-t}+3^{-t})^{-1/t}=2\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^t\right\}^{-1/t}\to2$.

(7) $t=-x$ とおくと、$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ より、
$x(x+\sqrt{x^2+1})=-t(\sqrt{t^2+1}-t)=-t\cdot\frac{t^2+1-t^2}{\sqrt{t^2+1}+t}=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+1}\to-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$.

3 [5] $f(0)=0$ に注意する。$\forall\varepsilon>0$ に対して $\delta=\varepsilon$ とすると、$|x|<\delta$ ならば x が有理数のとき $|f(x)-0|=|x|<\varepsilon$, x が無理数のとき $|f(x)-0|=0<\varepsilon$. よっていずれにせよ、$|f(x)-0|<\varepsilon$ であるから連続である。

4 [15] (1) 関数 $f(x)$ が有界閉区間 $I=[a,b]$ で連続かつ $f(a)\neq f(b)$ のとき、$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 A に対して $f(c)=A,\ a<c<b$ なる c が存在する。

(2) $g(x)=f(x)-x$ とおくと、$g(x)$ は $[-1,1]$ で連続で $g(-1)=f(-1)+1>-1+1=0,\ g(1)=f(1)-1<1-1=0$. よって $g(1)<0<g(-1)$ より中間値の定理より $g(c)=0,\ -1<c<1$ なる c が存在する。このとき $f(c)=c$ よりこの c が解となる。

(3) $f(x)=\tan x-\frac{1}{x}$ に対し $f(\frac{\pi}{4})=1-\frac{4}{\pi}<0,\ f(n\pi)=-\frac{1}{n\pi}<0\ (n\neq0),\ f(n\pi+\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}-\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{3}}<0$. よって、中間値の定理より $n=0$ のときは $f(c)=0,\ \frac{\pi}{4}<c<\frac{\pi}{3}$ なる c が、$n\neq0$ のときは $f(c)=0,\ n\pi<c<n\pi+\frac{\pi}{3}$ なる c が存在する。これが解である。唯一つであることは $(n\pi,n\pi+\pi/2)$ で $\tan x$ は狭義増加, $\frac{1}{x}$ は狭義減少より $f(x)$ は狭義増加であることからわかる。

5 [5] $f(x)=x^2$ が一様連続なら $\varepsilon=1$ に対し $\delta>0$ が存在して $x,x'\in\mathbf{R}:|x'-x|<\delta\Longrightarrow|f(x')-f(x)|<1$ となる[4]。特に $x'=x+\frac{\delta}{2}$ ととると、$|x'-x|=\frac{\delta}{2}<\delta$ であるが、$|f(x+\frac{\delta}{2})-f(x)|=\delta x+\frac{\delta^2}{4}>1\ (x>\frac{1}{\delta})$. これは $|f(x+\frac{\delta}{2})-f(x)|<1$ に矛盾する。

6 [10] $\forall\varepsilon>0$ をとっておく。$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ よりある $M_1>0$ がとれて $x\geq M_1\Longrightarrow|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ よりある $M_2>0$ がとれて $x\leq-M_2\Longrightarrow|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 今、$f(x)$ は有界閉区間 $I=[-M_2-1,M_1+1]$ で連続だから、I 上で一様連続、即ち、ある $0<\delta<1$ が存在して $x,x'\in I:|x-x'|<\delta\Longrightarrow|f(x')-f(x)|<\varepsilon$.
一方、$x,x'\geq M_1\Longrightarrow|f(x')-f(x)|\leq|f(x')|+|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$,
また、$x,x'\leq-M_2\Longrightarrow|f(x')-f(x)|\leq|f(x')|+|f(x)|<\varepsilon$.
よって、$\delta<1$ より $x,x'\in\mathbf{R}:|x'-x|<\delta$ なら $x,x'\in I$ または $x,x'\geq M_1$ または $x,x'\leq-M_2$ のいずれかが成り立つので、以上より $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$ となり一様連続であることが示された。

---

[1] **注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は 80 点である。
[2] この部分を略した解答は減点した。
[3]「挟みうちの原理」に言及していない解答は減点した。
[4] $f(x)$ が区間 I 上で一様連続あるとは $\forall\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して $x,x'\in I:|x'-x|<\delta\Longrightarrow|f(x')-f(x)|<\varepsilon$ なるときにいう。