**微分積分学 AD I, 数学序論演習 I**　　2001 年 5 月 7 日の試験の解答の要点[1]

**1** [10] "$\supset$" $x \in (1,2]$ ならば $x \in \left(1, 2+\frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbf{N})$ より $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1, 2+\frac{1}{n}\right)$ となり従う。
"$\subset$" $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1, 2+\frac{1}{n}\right)$ ならば、すべての $n \in \mathbf{N}$ に対し $x \in \left(1, 2+\frac{1}{n}\right)$、即ち $1 < x < 2 + \frac{1}{n}$ がすべての $n \in \mathbf{N}$ に対して成立する。ここで $n \to \infty$ として $1 < x \le 2$, 即ち $x \in (1,2]$ を得る。[2]

**2** [10] $A = \{x \in \mathbf{Q} | -1 < x < 2\}$ に注意する。$\sup A = 2$ を示す。$\forall x \in A$ に対して $x \le 2$ は明らか。一方、$\gamma < 2$ に対して 有理数の稠密性 より $\max\{\gamma, -1\} < x < 2$ を満たす有理数 $x$ が存在する。即ち、$\gamma < x < 2$ を満たす $x \in A$ が存在する。以上より $\sup A = 2$ を得る。[3]

**3** [15] (1) $\forall \varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbf{N}$ が存在して $n \ge N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

(2) (1) で $\varepsilon = \frac{|\alpha|}{2}$ とすると、$N \in \mathbf{N}$ が存在して $n \ge N$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$. このとき、$|a_n - \alpha| \le |\alpha| - |a_n|$ を用いれば $|a_n| \ge |\alpha| - \frac{|\alpha|}{2} = \frac{|\alpha|}{2}$ を得る。

(3) (2) より $n \ge N$ とすると $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n||\alpha|} \le \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n||\alpha|} \le \frac{2|a_n - \alpha|}{|\alpha|^2}$.
$\forall \varepsilon > 0$ にたいし、(1) を $''\varepsilon'' = \frac{|\alpha|^2}{2}\varepsilon$ で用いると、ある $N' \in \mathbf{N}$ が存在して $|a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|^2}{2}\varepsilon$ とできる。
よって $n \ge \max\{N, N'\}$ ならば、$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| < \varepsilon$、即ち、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$ を得る。

**4** [20] (1) $0 \le \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdots \frac{2}{n} \le 2 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$. よって、挟みうちの原理より (与式)$= 0$.

(2) $3^n \le 2^n + 3^n \le 2 \cdot 3^n$ より $3 \le (2^n + 3^n)^{1/n} \le 2^{1/n} \cdot 3$. $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$ より $2^{1/n} \cdot 3 \to 3$.
よって、挟みうちの原理より (与式)$= 3$.

(3) 二項定理より $2^n = (1+1)^n > n + \frac{n(n-1)}{2}$ であるから $2^n - n > \frac{n(n-1)}{2}$ を得る。
よって $\frac{n(n-1)}{2} \to \infty$ $(n \to \infty)$ より挟みうちの原理より (与式)$= \infty$.
[別解] まず $2^n - n = 2^n\left(1 - \frac{n}{2^n}\right)$ と変形する。二項定理より $2^n = (1+1)^n > \frac{n(n-1)}{2}$ となるから、$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1} \to 0$ より、挟みうちの原理より $\frac{n}{2^n} \to 0$ を得る。よって、$2^n - n \to \infty \times (1-0) = \infty$ $(n \to \infty)$ を得る。[4]

(4) $0 \le \frac{n^n}{n!} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{n} \le n \cdot 1 \cdots 1 = n \to \infty$ $(n \to \infty)$. よって、挟みうちの原理より (与式)$= \infty$.

**5** [10] まず $1 \le a_n \le 2$, $a_n \le a_{n+1}$ $(n \ge 1)$ に注意する。(数学的帰納法により容易に示せるので証明は略す[5]。) よって、$\{a_n\}$ は有界な増加列より収束する。$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと、与式で $n \to \infty$ とすると $\alpha = \sqrt{2+\alpha}$. これを解くと $\alpha = -1, 2$. $1 \le a_n \le 2$ より $1 \le \alpha \le 2$. よって $\alpha = 2$ を得る。

**6** [15] (1) $\frac{1}{2} \le a_n \le 1$ $(n \ge 1)$ は数学的帰納法より示せる[6]。これより $(1+a_n)(1+a_{n-1}) \ge \frac{9}{4}$ であるから、$|a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}}\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \le \frac{4}{9}|a_n - a_{n-1}|$ を得る。

(2) (1) より $|a_{n+1} - a_n| \le \frac{4}{9}|a_n - a_{n-1}| \le \left(\frac{4}{9}\right)^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| \le \cdots \le \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} |a_2 - a_1| = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}$ を得る。
よって、$m > n$ に対し $|a_m - a_n| \le |a_m - a_{m-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \le \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-2} \le \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}} \to 0$ $(n \to \infty)$. よって Cauchy 列となる。[7]

(3) $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと、与式で $n \to \infty$ とすると $\alpha = \frac{1}{1+\alpha}$. これを解くと $\alpha = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. $\frac{1}{2} \le a_n \le 1$ より $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$. よって $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ を得る。

---

[1]**注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。尚、[ ] 内はその問題の配点で、満点は 80 点である。

[2]集合 $A, B$ について、"$A = B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$A \subset B$ かつ $A \supset B$」", "$A \subset B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$x \in A \Longrightarrow x \in B$」"

[3]「有理数の稠密性」に言及していない解答は減点した。

[4] $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ を示していない解答は減点した。

[5]もちろん証明していない解答は減点した。

[6]もちろん証明していない解答は減点した。

[7]実際、勝手な $\varepsilon > 0$ にたいし $N \in \mathbf{N}$ を $N > 1 + \left(\log \frac{10}{9}\varepsilon\right) / \left(\log \frac{4}{9}\right)$ ととれば (ここでアルキメデスの原理を用いている)、$m, n \ge N$ ならば $|a_m - a_n| < \varepsilon$ をえる。(ここまで証明していない解答にも満点を与えた。)