微分積分学 **AD I**, 数学序論演習 **I**　　2002 年 5 月 24 日[1]

- 試験に関する連絡
  - 6 月 14 日 (金) の試験範囲は 第 2 章 § 2, § 3 (I) とします。
    主に教科書の問題とハンドアウトの問題から出題します。しっかり勉強しておいて下さい。

2 微分とその応用　　**§ 3** 微分の応用[2]

56. 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(e^x\log x - x^2\right)$　　(2) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$　　(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^{\frac{1}{x}}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{\tan^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$　　(5) $\lim_{x\to\pi/2-0}\dfrac{\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\tan x}$　　(6) $\lim_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)$

57. 関数 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$ は $\mathbf{R}$ で C^∞ であり、すべての $n = 0, 1, 2, \ldots$ について $f^{(n)}(0) = 0$ となることを証明せよ。
(注意: これより関数が C^∞ 級だからといって必ずしも Taylor 展開できないことがわかる。実際、この $f(x)$ が $x =$ のまわりに Taylor 展開できたとすると $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \equiv 0$ となり矛盾する。)

58. $x \to +0$ のとき、次の無限小を小さい方から順に並べよ。
$x\log x, \quad \sin x, \quad x^2\log x, \quad e^{-1/x}$

59. $x \to \infty$ のとき、次の無限大を大きい方から順に並べよ。
$\sqrt{x}, \quad \dfrac{x}{\log x}, \quad \log(\log x), \quad \dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}$

60. $x \to 0$ のとき、次の関数はそれぞれ何位の無限小か。

(1) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$　　(2) $e^x - x - 1$　　(3) $\tan^2 x$　　(4) $\sqrt{1+x} - 1$　　(5) $\operatorname{Arcsin} x$

(6) $\operatorname{Arctan} x$　　(7) $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} x$　　(8) $\sin x - \operatorname{Arcsin} x$　　(9) $x - \log(1+x)$

(10) $\dfrac{x\sqrt{x}}{1-x^3}$　　(11) $\cos 2x - \cos 3x$　　(12) $\tan x - \sin x$　　(13) e^{-1/x^2}

61. $x \to \infty$ のとき、次の関数はそれぞれ何位の無限大か。

(1) $\sqrt{3x-1}$　　(2) $x\{\log(1+x) - \log x\}$　　(3) 2^x　　(4) $2^{\sqrt{x}}$　　(5) $\sqrt{\dfrac{x^5+3}{x-2}}$

(6) $(\log x)^{100}$　　(7) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}$

62. 曲線 $y = f(x)$ 上の点 P から直線 ℓ におろした垂線の足を H とする。$\overline{OP} \to \infty$ のとき、$\overline{PH} \to 0$ であれば ℓ を漸近線という。直線 $y = ax + b$ が漸近線ならば、$|x| \to \infty$ のとき、$f(x)/x \to a$ かつ $(f(x) - ax) \to b$ であることを示せ。逆に、この関係によって a, b が決まるならば、$y = ax + b$ は漸近線であることを示せ。

63. 次の関数のグラフを描け。

(1) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$　　(2) $y = x\log x$　　(3) $y = x^2\log x$　　(4) $y = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

---

[1] 杉浦のホームページ (http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html) からもダウンロードできます。
[2] 教科書をよく読み、問 19–21 と p.68–の演習問題 **A 4, 5, 13, 14** を解いておくこと。

略解: **56** (1) ∞ (2) $e^{1/3}$ (3) 1 (4) $-2/3$ (5) 0 (6) 1　**57** 略　**58** $x\log x, \sin x, x^2\log x, e^{-1/x}$　**59** $1/\sin(\frac{1}{x}), x/\log x, \sqrt{x}, \log(\log x)$ **60** (1) 1/2 位 (2) 2 位 (3) 2 位 (4) 1 位 (5) 1 位 (6) 1 位 (7) 1 位 (8) 3 位 (9) 2 位 (10) 3/2 位 (11) 2 位 (12) 3 位 (13) 任意の x^n より高位　**61** (1) 1/2 位 (2) 有界 (3) 任意の x^n より高位 (4) 任意の x^n より高位 (5) 2 位 (6) 任意 $\alpha > 0$ に対し x^α より低位 (7) 1 位
62 略、**63** 略、但し、曲線のグラフを描くには次のことを調べよ。1. グラフが通る点、特に座標軸を切る点。 2. グラフの存在する範囲。 3. 直線、点に関する対称性、特に両座標軸・原点についての対称性。 4. 関数の増減と極大・極小。 5. グラフの凹凸。 6. 漸近線