**微分積分学 AD I, 数学序論演習 I** 2002 年 5 月 24 日[1]

● 試験に関する連絡

- 6 月 14 日 (金) の試験範囲は 第 2 章 § 2, § 3 (I) とします。
  主に教科書の問題とハンドアウトの問題から出題します。しっかり勉強しておいて下さい。

## 2 微分とその応用 § 3 微分の応用[2]

**56.** 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(e^x\log x - x^2\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,x\right)^{\frac{1}{x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\tan^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{\log\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\tan x}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,x\right)$

**57.** 関数 $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$ は $\mathbf{R}$ で $C^\infty$ であり、すべての $n=0,1,2,\ldots$ について $f^{(n)}(0)=0$ となることを証明せよ。
(注意: これより関数が $C^\infty$ 級だからといって必ずしも Taylor 展開できないことがわかる。実際、この $f(x)$ が $x=$ のまわりに Taylor 展開できたとすると $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\equiv 0$ となり矛盾する。)

**58.** $x\to +0$ のとき、次の無限小を小さい方から順に並べよ。
$x\log x$, $\sin x$, $x^2\log x$, $e^{-1/x}$

**59.** $x\to\infty$ のとき、次の無限大を大きい方から順に並べよ。
$\sqrt{x}$, $\dfrac{x}{\log x}$, $\log(\log x)$, $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}$

**60.** $x\to 0$ のとき、次の関数はそれぞれ何位の無限小か。

(1) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ (2) $e^x-x-1$ (3) $\tan^2 x$ (4) $\sqrt{1+x}-1$ (5) $\mathrm{Arcsin}\,x$

(6) $\mathrm{Arctan}\,x$ (7) $\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Arccos}\,x$ (8) $\sin x-\mathrm{Arcsin}\,x$ (9) $x-\log(1+x)$

(10) $\dfrac{x\sqrt{x}}{1-x^3}$ (11) $\cos 2x-\cos 3x$ (12) $\tan x-\sin x$ (13) $e^{-1/x^2}$

**61.** $x\to\infty$ のとき、次の関数はそれぞれ何位の無限大か。

(1) $\sqrt{3x-1}$ (2) $x\left\{\log(1+x)-\log x\right\}$ (3) $2^x$ (4) $2^{\sqrt{x}}$ (5) $\sqrt{\dfrac{x^5+3}{x-2}}$

(6) $(\log x)^{100}$ (7) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}$

**62.** 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $P$ から直線 $\ell$ におろした垂線の足を $H$ とする。$\overline{OP}\to\infty$ のとき、$\overline{PH}\to 0$ であれば $\ell$ を**漸近線**という。直線 $y=ax+b$ が漸近線ならば、$|x|\to\infty$ のとき、$f(x)/x\to a$ かつ $(f(x)-ax)\to b$ であることを示せ。逆に、この関係によって $a,b$ が決まるならば、$y=ax+b$ は漸近線であることを示せ。

**63.** 次の関数のグラフを描け。

(1) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ (2) $y=x\log x$ (3) $y=x^2\log x$ (4) $y=x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

---

[1]杉浦のホームページ ( http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/˜sugiura/index.html ) からもダウンロードできます。

[2]教科書をよく読み、問 19–21 と p.68–の演習問題 **A 4, 5, 13, 14** を解いておくこと。

**略解: 56** (1) $\infty$ (2) $e^{1/3}$ (3) 1 (4) $-2/3$ (5) 0 (6) 1 **57** 略 **58** $x\log x, \sin x, x^2\log x, e^{-1/x}$ **59** $1/\sin(\frac{1}{x}), x/\log x, \sqrt{x}, \log(\log x)$
**60** (1) 1/2 位 (2) 2 位 (3) 2 位 (4) 1 位 (5) 1 位 (6) 1 位 (7) 1 位 (8) 3 位 (9) 2 位 (10) 3/2 位 (11) 2 位 (12) 3 位 (13) 任意の $x^n$ より高位 **61** (1) 1/2 位 (2) 有界 (3) 任意の $x^n$ より高位 (4) 任意の $x^n$ より高位 (5) 2 位 (6) 任意 $\alpha>0$ に対し $x^\alpha$ より低位 (7) 1 位
**62** 略、**63** 略、但し、曲線のグラフを描くには次のことを調べよ。1. グラフが通る点、特に座標軸を切る点。 2. グラフの存在する範囲。 3. 直線、点に関する対称性、特に両座標軸・原点についての対称性。 4. 関数の増減と極大・極小。 5. グラフの凹凸。 6. 漸近線