微分積分学 **AD I**, 数学序論演習 **I**　　2002 年 5 月 17 日[1]

- 試験に関する連絡
  - 5 月 31 日 (金) の試験範囲は 第 1 章 § 5 (特に逆三角関数), 第 2 章 § 1 とします。
    主に教科書の問題とハンドアウトの問題から出題します。しっかり勉強しておいて下さい。

2 微分とその応用　　§ **2** 平均値の定理, テイラーの定理[2]

48. 平均値の定理を用いて次を示せ。

(1) $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2}$ $(-1 \le x \le 1)$　　(2) $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & (x > 0) \\ -\pi/2 & (x < 0) \end{cases}$

(3) $\operatorname{Arccos}(\sin x) = \dfrac{\pi}{2} - x$ $\left(|x| \le \dfrac{\pi}{2}\right)$　　(4) $\operatorname{Arccos} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Arctan} x$ $(x > 0)$

(5) $\operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Arctan} x$ $x \in \mathbf{R}$　　(6) $\tan\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x\right) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ $(-1 \le x \le 1)$

49. 次を証明せよ。

(1) $f(x)$ が $(0,\infty)$ で微分可能のとき、$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \alpha$ ならば $\lim_{x\to\infty}\{f(x+1) - f(x)\} = \alpha$.

(2) $f(x)$ が $[a,\infty)$ で連続, (a,∞) で微分可能かつ $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$ ならば $f'(c) = 0$ $(a < c < \infty)$ なる c が存在する。

(3) $f(x)$ が $[a,b]$ で微分可能で、$f'(x) \ge 0$ かつ少なくとも 1 点 $c \in [a,b]$ で $f'(c) > 0$ とするとき、$f(a) < f(b)$.

50. $f(x)$ を C^2 級の関数として次を証明せよ。

(1) $f''(x) \ge 0$ $(x \in \mathbf{R})$ ならば、$f(x)$ のグラフはその接線より上側にある。

(2) $f''(x) \ne 0$ ならば、h に対し θ を $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$ で定めるとき、$\lim_{h\to 0} \theta = 1/2$ である。

(3) $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$.

51. $[a,b]$ で $f''(x)$ が連続で、(a,b) で $f'''(x)$ が連続であるとき、次を証明せよ。

(1) $f(b) = f(a) + \dfrac{1}{2}(b-a)\{f'(a) + f'(b)\} - \dfrac{1}{12}(b-a)^3 f'''(c)$

(2) $f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + \dfrac{1}{24}(b-a)^3 f'''(c)$

52. $\operatorname{Arctan} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$　$(-1 \le x \le 1)$ を証明せよ。

(ここで $x = 1$ とすることで、$\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1} + \cdots$ が従う。)

53. Taylor の公式 (または Maclaurin の公式) を使って、次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2}$　　(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$　　(3) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

54. Maclaurin の公式を使って、次の不等式を示せ。

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} < e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

55. 次の関数の Maclaurin の展開式を示せ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$　　(2) $\sin^2 x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}$

(3) $\dfrac{\log(1+x)}{1+x} = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

---

[1] 杉浦のホームページ (http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html) からもダウンロードできます。

[2] 教科書をよく読み、問 14–16 と p.68–の演習問題 **A 7, 8, 9, 11, 12** を解いておくこと。**B 18–26** にも挑戦してください。

略解: **48–52, 54, 55** 略　　**53** (1) $-1/8$ (2) 2 (3) $-1/3$