微分積分学 AD I，数学序論演習 I　2002 年 5 月 17 日[1]

● 試験に関する連絡

- 5 月 31 日 (金) の試験範囲は 第 1 章 § 5 (特に逆三角関数), 第 2 章 § 1 とします。
  主に教科書の問題とハンドアウトの問題から出題します。しっかり勉強しておいて下さい。

2 微分とその応用　§ 2 平均値の定理, テイラーの定理[2]

48. 平均値の定理を用いて次を示せ。

(1) $\mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arccos}\,x = \dfrac{\pi}{2} \quad (-1 \le x \le 1)$

(2) $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & (x>0) \\ -\pi/2 & (x<0) \end{cases}$

(3) $\mathrm{Arccos}(\sin x) = \dfrac{\pi}{2} - x \quad \left(|x| \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

(4) $\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{Arctan}\,x \quad (x>0)$

(5) $\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{Arctan}\,x \quad x \in \mathbf{R}$

(6) $\tan\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\,x\right) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \quad (-1 \le x \le 1)$

49. 次を証明せよ。

(1) $f(x)$ が $(0,\infty)$ で微分可能のとき、$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \alpha$ ならば $\lim_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x)\} = \alpha$.

(2) $f(x)$ が $[a,\infty)$ で連続, (a,∞) で微分可能かつ $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$ ならば $f'(c) = 0$ $(a<c<\infty)$ なる c が存在する。

(3) $f(x)$ が $[a,b]$ で微分可能で、$f'(x) \ge 0$ かつ少なくとも 1 点 $c \in [a,b]$ で $f'(c) > 0$ とするとき、$f(a) < f(b)$.

50. $f(x)$ を C^2 級の関数として次を証明せよ。

(1) $f''(x) \ge 0$ $(x \in \mathbf{R})$ ならば、$f(x)$ のグラフはその接線より上側にある。

(2) $f''(x) \ne 0$ ならば、h に対し θ を $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$ で定めるとき、$\lim_{h\to 0}\theta = 1/2$ である。

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x)$.

51. $[a,b]$ で $f''(x)$ が連続で、(a,b) で $f'''(x)$ が連続であるとき、次を証明せよ。

(1) $f(b) = f(a) + \dfrac{1}{2}(b-a)\{f'(a)+f'(b)\} - \dfrac{1}{12}(b-a)^3 f'''(c)$

(2) $f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + \dfrac{1}{24}(b-a)^3 f'''(c)$

52. $\mathrm{Arctan}\,x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad (-1 \le x \le 1)$ を証明せよ。

(ここで $x=1$ とすることで、$\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1} + \cdots$ が従う。)

53. Taylor の公式 (または Maclaurin の公式) を使って、次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

54. Maclaurin の公式を使って、次の不等式を示せ。

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} < e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

55. 次の関数の Maclaurin の展開式を示せ。

(1) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n$

(2) $\displaystyle\sin^2 x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}$

(3) $\displaystyle\frac{\log(1+x)}{1+x} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

[1] 杉浦のホームページ (http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html) からもダウンロードできます。

[2] 教科書をよく読み、問 14–16 と p.68–の演習問題 **A 7, 8, 9, 11, 12** を解いておくこと。**B 18–26** にも挑戦してください。

略解: 48–52, 54, 55 略　**53** (1) −1/8 (2) 2 (3) −1/3