微分積分学 **AD I**, 数学序論演習 **I**　　2002 年 4 月 30 日[1]

- 試験に関する連絡
  - 5 月 17 日のテストの日程を変更し 5 月 21 日 (火) とします。試験範囲は 第 1 章 § 3, § 4 とします。
    主に教科書の問題とハンドアウトの問題から出題します。しっかり勉強しておいて下さい。

§ 3 関数の極限の補足問題 (追加) [2]

31. 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/5}-(1-x)^{1/5}}{(1+2x)^{1/3}-(1-2x)^{1/3}}$　(2) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$　(3) $\lim_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$

(4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\{2\log(1+x)-\log(1+2x)\}$　(5) $\lim_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+a}-\sin\sqrt{x})$　(6) $\lim_{x\to-\infty} x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

§ 4 連続関数の補足問題 (追加) [3]

32. 次の関数が連続となるように定数 a, b を決めよ。

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x\in(-\infty,0)) \\ ax+b & (x\in[0,1]) \\ \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-4x+6}}{x-1} & (x\in(1,\infty)) \end{cases}$$

33. 次の関数の定義域および連続性を調べ、グラフをかけ。

$$f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{x}{1+x}+\frac{x}{(1+x)^2}+\cdots+\frac{x}{(1+x)^n}\right)$$

34. (1) 区間 I において $f(x)$ も $g(x)$ も連続とする。有理数 x に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つとき、I 上のすべての点 x に対しても $f(x)=g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) f が、すべての $x, y\in\mathbf{R}$ に対し $f(x+y)=f(x)+f(y)$ を満たしかつ連続ならば、$f(x)=f(1)x$ $(x\in\mathbf{R})$ となることを示せ。

注意 (2) で f が連続でない場合、$f(x+y)=f(x)+f(y)$ を満たしかつ $f(x)=f(1)x$ を満たさない関数 f を構成できる。

35. 次の関数がそれぞれ指定された区間 I 上で一様連続か調べよ。

(1) $e^{-1/|x|}$ $(I=\mathbf{R})$　(2) x^2 $(I=\mathbf{R})$　(3) $\sin\dfrac{1}{x}$ $(I=(0,\pi))$

36. 関数 $f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上で連続で $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ を満たせば、$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で一様連続であることを示せ。

§ 5 指数関数, 対数関数, 逆三角関数の補足問題 (追加) [4]

37. 次の値を求めよ。

(1) $\operatorname{Arcsin} 1$　(2) $\operatorname{Arcsin}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$　(3) $\operatorname{Arccos}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(4) $\operatorname{Arctan}\sqrt{3}$　(5) $\lim_{x\to\infty}\operatorname{Arctan} x$

38. 次の等式を示せ。

(1) $\operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\operatorname{Arcsin}\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{\pi}{2}$　(2) $2\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3}+\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$　(裏面もあります)

---

[1] 杉浦のホームページ (http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html) からもダウンロードできます。

[2] 略解: **31** (1) 3/10 (2) 1 (3) 極限なし (4) 1 (5) 0 (6) 1/2

[3] 略解: **32** $a=\frac{3}{\sqrt{2}}-1, b=1$　**33** 定義域 $x>-1/2$, $-1/2<x<0, 0<x$ で連続, グラフは略　**34** 略　**35** (1) ○ (2) × (3) ×　**36** 略

[4] 略解: **37** (1) $\pi/2$ (2) $-\pi/6$ (3) $\pi/6$ (4) $\pi/3$ (5) $\pi/2$　**38** 略

2 微分とその応用　　§ 1 微分係数, 導関数の補足問題[5]

39. 次の関数について、$f'_+(0), f'_-(0), f'(0)$ が存在するか。存在すればそれを求めよ。

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} & (x>0)\\ 0 & (x\leq 0)\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{2x+1} & (x\geq 0)\\ ax^2+bx+1 & (x<0)\end{cases}$　(ただし、a,b は定数。)

(5) $f(x)=|x|-\sin|x|$　　(6) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

40. 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $\mathrm{Arccos}(\sin x)$　　(2) $\mathrm{Arcsin}(\cos x)$　　(3) $\mathrm{Arctan}\,x+\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x}$

(4) $\mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$　　(5) $\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

41. 次の媒介変数表示の関数から dy/dx を求めよ。

(1) $x=a\left(t+\dfrac{1}{t}\right),\ y=a\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$　　(2) $x=\dfrac{3at}{1+t^3},\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$

42. 次の関数の n 次導関数を求めよ。(ただし、a,b は定数。)

(1) e^{ax+b}　　(2) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$　　(3) $e^x\cos x$　　(4) $\sin^3 x$　　(5) $\cos ax\sin bx$　　(6) $x^{n-1}\log x$

43. 次の媒介変数表示の関数から d^2y/dx^2 を求めよ。

(1) $x=a\cos t,\ y=b\sin t$　　(2) $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$

44. $y=\mathrm{Arctan}\,x$ に対し、$\dfrac{d^ny}{dx^n}=(n-1)!\cos^n y\sin\left(ny+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n=1,2,\dots)$ を示せ。

45. $f(x)=\mathrm{Arctan}\,x$ のとき、次を示せ。

(1) $(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0$

(2) $f^{(2m)}(0)=0,\ f^{(2m+1)}(x)=(-1)^m(2m)!$

46. $H_n(x)=(-1)^ne^{x^2/2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right)$ に対し、以下を示せ。

(1) $H_{n+1}(x)=xH_n(x)-nH_{n-1}(x)$ (これによって、$H_n(x)$ が n 次多項式であることがわかる。これを Hermite 多項式と呼ぶ。)

(2) $H'_n(x)=nH_{n-1}(x)$

(3) $H''_n(x)-xH'_n(x)+nH_n(x)=0$ (Hermite の微分方程式)

47. $L_n(x)=e^x\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^{-x}\right)$ に対し、以下を示せ。

(1) $L_n(x)$ は n 次多項式である。(Laguerre の多項式)

(2) $xL''_n(x)+(1-x)L'_n(x)+nL_n(x)=0$ (Laguerre の微分方程式)

---

[5] 教科書をよく読み、問 1–13 と p.68–の演習問題 **A**, **1–3**, **6**, **7**, **10** を解いておくこと。

略解: **39** $f'_+(0), f'_-(0), f'(0)$ の順に (1) $2,-1$, なし　(2) $0,0,0$　(3) $0,0,0$　(4) $1, b, b=1$ のときのみ存在し 1　(5) $0,0,0$　(6) なし, なし, なし

40 (1) $-\frac{\cos x}{|\cos x|}$　(2) $\frac{\sin x}{|\sin x|}$　(3) 0　(4) $\frac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}}$　(5) $1/2$ $(x>0)$, $-1/2$ $(x<0)$　　**41** (1) $\frac{t^2+1}{t^2-1}$　(2) $\frac{2t-t^4}{1-2t^3}$

42 (1) a^ne^{ax+b}　(2) $(-1)^n n!\left\{(x+1)^{-n-1}-(x+2)^{-n-1}\right\}$　(3) $2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$　(4) $\frac{1}{4}\left\{3\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-3^n3\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$
(5) $\frac{1}{2}\left[(a+b)^n\sin\left\{(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right\}+(b-a)^n\sin\left\{(b-a)x+\frac{n\pi}{2}\right\}\right]$　(6) $\frac{(n-1)!}{x}$　　**43** (1) $\frac{b}{a^2}\sin^3 t$　(2) $\frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}$

44–47 略