微分積分学 AD I, 数学序論演習 I　　2002 年 4 月 30 日[1]

● 試験に関する連絡

- 5 月 17 日のテストの日程を変更し 5 月 21 日 (火) とします。試験範囲は 第 1 章 § 3, § 4 とします。主に教科書の問題とハンドアウトの問題から出題します。しっかり勉強しておいて下さい。

§ 3 関数の極限の補足問題 (追加) [2]

31.　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/5}-(1-x)^{1/5}}{(1+2x)^{1/3}-(1-2x)^{1/3}}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\{2\log(1+x)-\log(1+2x)\}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+a}-\sin\sqrt{x})$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

§ 4 連続関数の補足問題 (追加) [3]

32.　次の関数が連続となるように定数 a, b を決めよ。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & (x\in(-\infty,0))\\ ax+b & (x\in[0,1])\\ \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-4x+6}}{x-1} & (x\in(1,\infty))\end{cases}$$

33.　次の関数の定義域および連続性を調べ、グラフをかけ。

$$f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{x}{1+x}+\frac{x}{(1+x)^2}+\cdots+\frac{x}{(1+x)^n}\right)$$

34.　(1) 区間 I において $f(x)$ も $g(x)$ も連続とする。有理数 x に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つとき、I 上のすべての点 x に対しても $f(x)=g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) f が、すべての $x, y\in\mathbf{R}$ に対し $f(x+y)=f(x)+f(y)$ を満たしかつ連続ならば、$f(x)=f(1)x$ $(x\in\mathbf{R})$ となることを示せ。

注意　(2) で f が連続でない場合、$f(x+y)=f(x)+f(y)$ を満たしかつ $f(x)=f(1)x$ を満たさない関数 f を構成できる。

35.　次の関数がそれぞれ指定された区間 I 上で一様連続か調べよ。

(1) $e^{-1/|x|}$ $(I=\mathbf{R})$　(2) x^2 $(I=\mathbf{R})$　(3) $\sin\dfrac{1}{x}$ $(I=(0,\pi))$

36.　関数 $f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上で連続で $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ を満たせば、$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で一様連続であることを示せ。

§ 5 指数関数, 対数関数, 逆三角関数の補足問題 (追加) [4]

37.　次の値を求めよ。

(1) $\mathrm{Arcsin}\,1$　(2) $\mathrm{Arcsin}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$　(3) $\mathrm{Arccos}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(4) $\mathrm{Arctan}\,\sqrt{3}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\mathrm{Arctan}\,x$

38.　次の等式を示せ。

(1) $\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{\pi}{2}$　(2) $2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{3}+\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$　**(裏面もあります)**

---

[1] 杉浦のホームページ (http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html) からもダウンロードできます。

[2] **略解: 31** (1) 3/10 (2) 1 (3) 極限なし (4) 1 (5) 0 (6) 1/2

[3] **略解: 32** $a=\frac{3}{\sqrt{2}}-1, b=1$　**33** 定義域 $x>-1/2$, $-1/2<x<0, 0<x$ で連続, グラフは略　**34** 略　**35** (1) ○ (2) × (3) ×　**36** 略

[4] **略解: 37** (1) $\pi/2$ (2) $-\pi/6$ (3) $\pi/6$ (4) $\pi/3$ (5) $\pi/2$ **38** 略

39. 次の関数について、$f'_+(0), f'_-(0), f'(0)$ が存在するか。存在すればそれを求めよ。

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$　　(4) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+1} & (x \geq 0) \\ ax^2 + bx + 1 & (x < 0) \end{cases}$ (ただし、a, b は定数。)

(5) $f(x) = |x| - \sin |x|$　　(6) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

40. 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $\mathrm{Arccos}(\sin x)$　　(2) $\mathrm{Arcsin}(\cos x)$　　(3) $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \dfrac{1}{x}$

(4) $\mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$　　(5) $\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

41. 次の媒介変数表示の関数から dy/dx を求めよ。

(1) $x = a\left(t + \dfrac{1}{t}\right),\ y = a\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$　　(2) $x = \dfrac{3at}{1+t^3},\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$

42. 次の関数の n 次導関数を求めよ。(ただし、a, b は定数。)

(1) e^{ax+b}　　(2) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$　　(3) $e^x \cos x$　　(4) $\sin^3 x$　　(5) $\cos ax \sin bx$　　(6) $x^{n-1} \log x$

43. 次の媒介変数表示の関数から d^2y/dx^2 を求めよ。

(1) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$　　(2) $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t$

44. $y = \mathrm{Arctan}\, x$ に対し、$\dfrac{d^n y}{dx^n} = (n-1)!\cos^n y \sin\left(ny + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を示せ。

45. $f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$ のとき、次を示せ。

(1) $(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$

(2) $f^{(2m)}(0) = 0,\ f^{(2m+1)}(x) = (-1)^m(2m)!$

46. $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right)$ に対し、以下を示せ。

(1) $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$ (これによって、$H_n(x)$ が n 次多項式であることがわかる。これを Hermite 多項式と呼ぶ。)

(2) $H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$

(3) $H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0$ (Hermite の微分方程式)

47. $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$ に対し、以下を示せ。

(1) $L_n(x)$ は n 次多項式である。(Laguerre の多項式)

(2) $xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$ (Laguerre の微分方程式)

[5] 教科書をよく読み、問 1–13 と p.68–の演習問題 **A**, **1–3**, **6**, **7**, **10** を解いておくこと。

略解: 39 $f'_+(0), f'_-(0), f'(0)$ の順に (1) $2, -1,$ なし (2) $0, 0, 0$ (3) $0, 0, 0$ (4) $1, b,$ $b = 1$ のときのみ存在し 1 (5) $0, 0, 0$ (6) なし, なし, なし

40 (1) $-\frac{\cos x}{|\cos x|}$ (2) $\frac{\sin x}{|\sin x|}$ (3) 0 (4) $\frac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}}$ (5) $1/2$ $(x > 0)$, $-1/2$ $(x < 0)$　**41** (1) $\frac{t^2+1}{t^2-1}$ (2) $\frac{2t-t^4}{1-2t^3}$

42 (1) $a^n e^{ax+b}$ (2) $(-1)^n n!\left\{(x+1)^{-n-1} - (x+2)^{-n-1}\right\}$ (3) $2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$ (4) $\frac{1}{4}\left\{3\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 3^n 3\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}$
(5) $\frac{1}{2}\left[(a+b)^n \sin\left\{(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right\} + (b-a)^n \sin\left\{(b-a)x + \frac{n\pi}{2}\right\}\right]$ (6) $\frac{(n-1)!}{x}$　**43** (1) $\frac{b}{a^2}\sin^3 t$ (2) $\frac{b}{3a^2\cos^4 t \sin t}$

44–47 略