微分積分学 **AD I**, 数学序論演習 **I**　　2002 年 4 月 19 日[1]

- 試験に関する連絡
  - 5 月 7 日のテストの範囲は 第 1 章 § 1, § 2 とします。
    主に教科書の問題とハンドアウトの問題から出題します。しっかり勉強しておいて下さい。[2]
  - それ以降のテストの予定は、2 回目を 5 月 17 日、3 回目を 5 月 31 日、4 回目を 6 月 14 日、5 回目を 6 月 28 日にする予定です。範囲等は追って連絡します。

§ 2 数列の補足問題 (続き) [3]

15. 数列 $\{a_n\}$ に対し次の定数 c, $0 \leq c < 1$, の存在を仮定する。

$$\forall n \geq 2 \text{ に対し } |a_{n+1} - a_n| \leq c|a_n - a_{n-1}|$$

このとき、$\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを証明せよ。

16. 次の数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示し $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n + 1} \qquad (n \in \mathbf{N})$

(2) $a_1 \geq 0,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \qquad (n \in \mathbf{N})$

(3) $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1,\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}\ (n \geq 3)$

17. $r \neq 1$ のとき等比級数の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ の両辺を r について微分することにより、

$$\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} = \frac{1 - (n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

を示せ。また、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 r^{k-1}$ はどうなるか考察せよ。

18. 次の級数の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

19. 次の数列の上極限、下極限を求めよ。

(1) $a_n = 1 + (-1)^n$　　(2) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$　　(3) $a_n = n + (-1)^n n$　　(4) $a_n = n^2 + (-2)^n$

20. 数列 $\{a_n\}$ に対し次を示せ。

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

また、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ が存在すれば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在するか。存在する場合は証明を、存在しない場合例をあげることにより証明せよ。

(裏面もあります)

---

[1] 杉浦のホームページ (http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html) からもダウンロードできます。

[2] 杉浦は 5 月 2 日から出張で留守にします。質問は 5 月 1 日までにしておくこと。基礎ゼミの先生などに教えをこうのもよいでしょう。

[3] 解答: **15.** 略　**16.** $\lim a_n$ のみ (1) $\sqrt{2}$ (2) $(1+\sqrt{5})/2$ (3) $(a_2 + \beta a_1)/(1+\beta)$ (ヒント：$a_n + \beta a_{n-1} = a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ を用いよ)
17. $\sum k^2 r^{k-1} = \frac{1+r-(n+1)^2 r^n + (2n^2+2n-1)r^{n+1} - n^2 r^{n+2}}{(1-r)^3}$　　**18.** (1) 収束 (2) 発散 (3) 発散
19. $\limsup a_n$, $\liminf a_n$ の順に (1) $2, 0$ (2) $1, -1$ (3) $\infty, 0$ (4) $\infty, -\infty$　　**20** 前半は略、後半は問題 **19**(1) の例を考えよ

§ 3 関数の極限の補足問題 [4]

21. 次の極限値は存在するか。存在すればその値を求め、存在しなければその理由を述べよ。

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x}$　(2) $\lim_{x\to \pi/2}\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$　(3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\tan(x^2-1)}{x-1}$　(4) $\lim_{x\to +0} e^{-1/x}$　(5) $\lim_{x\to -0} e^{-1/x}$

(6) $\lim_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$　(7) $\lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$　(8) $\lim_{x\to \infty} x\sin\dfrac{1}{x}$　(9) $\lim_{x\to -0}\dfrac{[x]}{x}$　(10) $\lim_{x\to +0}\dfrac{[x]}{x}$

(11) $\lim_{x\to 1+0}\dfrac{x^2+x-2}{|x-1|}$　(12) $\lim_{x\to 1-0}\dfrac{x^2+x-2}{|x-1|}$

22. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{-1/2}-(1-ax)}{x^2}$ が極限をもつように a を定め、極限を求めよ。

23. 次の極限を求めよ。但し、$0<a<b<c$ とする。

(1) $\lim_{x\to\infty}(a^x+b^x+c^x)^{1/x}$　(2) $\lim_{x\to -\infty}(a^x+b^x+c^x)^{1/x}$

24. 実数 x に対し $\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^n\right\}$ を求めよ。

§ 4 連続関数の補足問題 [5]

25. $f(x)=\begin{cases} x & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$ とおくと、$f(x)$ は $x=0$ でのみ連続で、$x\neq 0$ なる点 x では不連続であることを示せ。

26. $(0,\infty)$ での方程式 $x\tan x=1$ の解について次を示せ。

(1) 区間 $(n\pi, x\pi+\pi/2)$ $(n=0,1,2,\dots)$ に解が一つずつある。

(2) $(n\pi, x\pi+\pi/2)$ にある解を $x_n=n\pi+\alpha_n$ とおくと $\{\alpha_n\}$ は次を満たす。

(a) $\dfrac{\pi}{2}>\alpha_0>\alpha_1>\cdots>\alpha_n>\cdots$　(b) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$

27. n が奇数のとき方程式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ は少なくとも一つの実数解を持つことを示せ。

28. $\mathbf{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ が次の条件 $(*)$ を満たせば、$y=f(x)$ のグラフは直線 $y=x$ と必ず交わることを示せ。

$$(*)\qquad |f(x)|\le a|x|+b$$

ただし、$0<a<1$, $b>0$ は定数とする。

29. 区間 $(0,1]$ において、最大値も最小値もとらない連続関数の例をあげよ。

§ 5 指数関数, 対数関数, 逆三角関数の補足問題 [6]

30. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{x} & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$ が $x=0$ で連続あることを示せ。

---

[4] 教科書をよく読み、問 19–28 と p.31–の演習問題 **A**, **12** と **B**, **25** を解いておくこと。
解答: **21** (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 0 (5) ∞ (6) 存在しない (7) 0 (8) 1 (9) ∞ (10) 0 (11) 3 (12) -3
22 $a=1/2$ 極限 $3/8$　**23** (1) c (2) a　**24** 0 (x：無理数) 1 (x：有理数)

[5] 教科書をよく読み、問 29–34 と p.31–の演習問題 **A**, **13–15** と **B**, **28–31** も解いておくこと。 解答: **25–28** 略　**29** 例えば $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

[6] 教科書をよく読み、問 35–38 と p.31–の演習問題 **A**, **16**, **17** を解いておくこと。 解答: **30** 略