微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2002 年 4 月 19 日[1]

● 試験に関する連絡

- 5 月 7 日のテストの範囲は 第 1 章 § 1, § 2 とします。
  主に教科書の問題とハンドアウトの問題から出題します。しっかり勉強しておいて下さい。[2]
- それ以降のテストの予定は、2 回目を 5 月 17 日、3 回目を 5 月 31 日、4 回目を 6 月 14 日、5 回目を 6 月 28 日にする予定です。範囲等は追って連絡します。

§ 2 数列の補足問題 (続き) [3]

15. 数列 $\{a_n\}$ に対し次の定数 c, $0 \le c < 1$, の存在を仮定する。

$$\forall n \ge 2 \text{ に対し } |a_{n+1} - a_n| \le c|a_n - a_{n-1}|$$

このとき、$\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを証明せよ。

16. 次の数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示し $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n + 1} \qquad (n \in \mathbf{N})$

(2) $a_1 \ge 0,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \qquad (n \in \mathbf{N})$

(3) $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ $(n \ge 3)$

17. $r \ne 1$ のとき等比級数の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ の両辺を r について微分することにより、

$$\sum_{k=1}^{n} k r^{k-1} = \frac{1 - (n+1)r^n + n r^{n+1}}{(1-r)^2}$$

を示せ。また、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 r^{k-1}$ はどうなるか考察せよ。

18. 次の級数の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

19. 次の数列の上極限、下極限を求めよ。

(1) $a_n = 1 + (-1)^n$　　(2) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$　　(3) $a_n = n + (-1)^n n$　　(4) $a_n = n^2 + (-2)^n$

20. 数列 $\{a_n\}$ に対し次を示せ。

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \le \limsup_{n\to\infty} a_n$$

また、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ が存在すれば、$\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在するか。存在する場合は証明を、存在しない場合例をあげることにより証明せよ。

(裏面もあります）

[1] 杉浦のホームページ (http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html) からもダウンロードできます。

[2] 杉浦は 5 月 2 日から出張で留守にします。質問は 5 月 1 日までにしておくこと。基礎ゼミの先生などに教えをこうのもよいでしょう。

[3] **解答: 15.** 略 **16.** $\lim a_n$ のみ (1) $\sqrt{2}$ (2) $(1+\sqrt{5})/2$ (3) $(a_2 + \beta a_1)/(1+\beta)$ (ヒント：$a_n + \beta a_{n-1} = a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ を用いよ)
17. $\sum k^2 r^{k-1} = \frac{1+r-(n+1)^2 r^n + (2n^2+2n-1) r^{n+1} - n^2 r^{n+2}}{(1-r)^3}$　　**18.** (1) 収束 (2) 発散 (3) 発散
19. $\limsup a_n, \liminf a_n$ の順に (1) $2, 0$ (2) $1, -1$ (3) $\infty, 0$ (4) $\infty, -\infty$　　**20** 前半は略、後半は問題 **19**(1) の例を考えよ

§ 3 関数の極限の補足問題 [4]

21. 次の極限値は存在するか。存在すればその値を求め、存在しなければその理由を述べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\tan(x^2-1)}{x-1}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to +0}e^{-1/x}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to -0}e^{-1/x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ (7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$ (8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$ (9) $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{[x]}{x}$ (10) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{[x]}{x}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+x-2}{|x-1|}$ (12) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+x-2}{|x-1|}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-1/2}-(1-ax)}{x^2}$ が極限をもつように a を定め、極限を求めよ。

23. 次の極限を求めよ。但し、$0<a<b<c$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(a^x+b^x+c^x)^{1/x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(a^x+b^x+c^x)^{1/x}$

24. 実数 x に対し $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^n\right\}$ を求めよ。

§ 4 連続関数の補足問題 [5]

25. $f(x)=\begin{cases} x & (x\text{ は有理数}) \\ 0 & (x\text{ は無理数}) \end{cases}$ とおくと、$f(x)$ は $x=0$ でのみ連続で、$x\neq 0$ なる点 x では不連続であることを示せ。

26. $(0,\infty)$ での方程式 $x\tan x=1$ の解について次を示せ。

(1) 区間 $(n\pi, x\pi+\pi/2)$ $(n=0,1,2,\dots)$ に解が一つずつある。

(2) $(n\pi, x\pi+\pi/2)$ にある解を $x_n=n\pi+\alpha_n$ とおくと $\{\alpha_n\}$ は次を満たす。

(a) $\displaystyle\frac{\pi}{2}>\alpha_0>\alpha_1>\cdots>\alpha_n>\cdots$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$

27. n が奇数のとき方程式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ は少なくとも一つの実数解を持つことを示せ。

28. $\mathbf{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ が次の条件 $(*)$ を満たせば、$y=f(x)$ のグラフは直線 $y=x$ と必ず交わることを示せ。

$$(*) \qquad |f(x)|\leq a|x|+b$$

ただし、$0<a<1$, $b>0$ は定数とする。

29. 区間 $(0,1]$ において、最大値も最小値もとらない連続関数の例をあげよ。

§ 5 指数関数, 対数関数, 逆三角関数の補足問題 [6]

30. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{Arcsin}\,x}{x} & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$ が $x=0$ で連続あることを示せ。

---

[4]教科書をよく読み、問 19–28 と p.31–の演習問題 **A**, **12** と **B**, **25** を解いておくこと。
解答: 21 (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 0 (5) ∞ (6) 存在しない (7) 0 (8) 1 (9) ∞ (10) 0 (11) 3 (12) -3
22 $a=1/2$ 極限 3/8 **23** (1) c (2) a **24** 0 (x : 無理数) 1 (x : 有理数)

[5]教科書をよく読み、問 29–34 と p.31–の演習問題 **A**, **13–15** と **B**, **28–31** も解いておくこと。 **解答: 25–28** 略 **29** 例えば $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

[6]教科書をよく読み、問 35–38 と p.31–の演習問題 **A**, **16**, **17** を解いておくこと。 **解答: 30** 略